

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DE MAÎTRISE EN GÉNIE

M.Ing.

PAR  
MAGUELONNE HÉRITIER

VISUALISATION VOLUMIQUE PAR PROJECTION DU MAXIMUM  
D'INTENSITÉ AVEC ONDELETTES

MONTREAL, LE 7 SEPTEMBRE 2005

(c) droits réservés de Maguelonne Héritier

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ  
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

Mme Rita Noumeir directrice de mémoire  
Département du génie électrique à l'École de technologie supérieure

M. Eric Paquette, président du jury  
Département de génie logiciel et des TI à l'École de technologie supérieure

M. Jean-Marc Lina, membre du jury  
Département du génie électrique à l'École de technologie supérieure

ELLE A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC  
LE 12 JUILLET 2005  
À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

## **VISUALISATION VOLUMIQUE PAR PROJECTION DU MAXIMUM D'INTENSITÉ AVEC ONDELETTES**

Les processus de visualisation demandent à être performants autant d'un point de vue vitesse de calcul que qualité de résultat. C'est pourquoi il est intéressant d'intégrer des outils de représentation de données efficaces comme les ondelettes, dans le but d'optimiser le stockage en mémoire, et les processus de traitement.

Nous nous intéressons à une méthode de visualisation très utilisée en imagerie médicale : la projection du maximum d'intensité (MIP); elle consiste à afficher la valeur maximale rencontrée sur chaque rayon de projection.

Une nouvelle représentation des données volumiques est proposée s'inspirant de la théorie de l'ondelette morphologique. Deux approches de MIP progressif ont été développées avec cette représentation. La deuxième plus prometteuse permet une compression des données initiales de plus de 70% pour une qualité de résultats presque parfaite. Aussi, la vitesse d'exécution du MIP proposé rivalise avec celle des meilleurs algorithmes développés jusqu'à ce jour.

# **VISUALISATION VOLUMIQUE PAR PROJECTION DU MAXIMUM D'INTENSITÉ AVEC ONDELETTES**

Maguelonne Héritier

## **SOMMAIRE**

Les techniques d'acquisition en imagerie médicale génèrent de plus en plus de données. Les processus de visualisation demandent à être performants autant d'un point de vue vitesse de calcul que qualité de résultat. C'est pourquoi il est intéressant d'intégrer des outils de représentation de données efficaces comme les ondelettes, dans le but d'optimiser le stockage en mémoire, et les processus de traitement.

Nous nous intéressons plus particulièrement à une méthode de visualisation très utilisée en imagerie médicale : la projection du maximum d'intensité (MIP); elle consiste à afficher uniquement la valeur maximale rencontrée sur chaque rayon de projection.

Une nouvelle représentation des données volumiques est proposée s'inspirant de la théorie de l'ondelette morphologique et de l'algorithme proposé par Roerdink du MIP par représentation en pyramide d'adjonction. Deux approches de MIP progressif ont été développées avec cette nouvelle représentation. La deuxième plus prometteuse permet une compression des données initiales de plus de 70% pour une qualité de résultats presque parfaite. Aussi, la vitesse d'exécution du MIP proposé rivalise avec celle des meilleurs algorithmes développés jusqu'à ce jour.

# **MAXIMUM INTENSITY PROJECTION WITH WAVELETS FOR 3D VISUALIZATION**

Maguelonne Héritier

## **ABSTRACT**

Nowadays, 3D images used for medical applications are increasingly bigger. Volume-rendering algorithms are needed to visualize 3D images. Despite the increasing interest in 3D visualization, volume-rendering algorithms still suffer from high numerical complexity and high memory costs. Powerful techniques based on the wavelet transform may help optimizing these algorithms.

Maximum Intensity Projection (MIP) is a volume-rendering technique which is used to visualize high-intensity structures within volumetric data. At each pixel the highest data value, which is encountered along a corresponding viewing ray, is depicted.

We propose a hierarchical representation for the MIP volume-rendering technique, based on a morphological wavelet transform, which allows progressive refinement. We use the general scheme of wavelet decomposition introduced by Heijmans to define our decomposition. Two different methods have been developed with this new representation in order to improve the MIP algorithm. The second one gives promising results. We can obtain a very good approximation of the MIP projection with less than 20% of the volumetric data. This makes the proposed algorithm very competitive for MIP rendering.

## **REMERCIEMENTS**

Je tiens à remercier particulièrement ma directrice de recherche, Mme Rita Noumeir, professeure au département génie électrique de l'ÉTS, qui m'a guidé et encouragé dans ce projet. Elle m'a assuré un soutien financier très secourable durant toute la durée de mon travail.

Je remercie également les membres du laboratoire Livia qui m'ont accompagné tout au long de ce projet.

Merci aussi à ma famille, mon copain, et mes amis pour leurs aides et leur soutien. Je leur dédie ce mémoire.

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE .....	i
ABSTRACT .....	ii
REMERCIEMENTS .....	iii
TABLE DES MATIÈRES .....	iv
LISTE DES FIGURES .....	vii
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES .....	x
CHAPITRE 1 INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 2 LES TECHNIQUES DE PROJECTION MIP .....	9
2.1 Méthodes d'optimisation du MIP .....	9
2.1.1 L'algorithmes de Lukas Mroz [29] .....	10
2.1.1.1 Prétraitement .....	10
2.1.1.2 Storage .....	11
2.1.1.3 Le rendu .....	12
2.1.2 Méthode basée sur le codage de distances de Zuiderveld [35] .....	13
2.1.3 Méthode basée sur la déformation de l'espace de Cai et Sakas [36] .....	14
2.1.4 Méthode utilisant le matériel graphique [37] .....	15
2.1.5 Diverses autres méthodes d'optimisation .....	16
2.2 La décomposition pyramidale de Roerdink [31] .....	16
2.2.1 Décomposition pyramidale morphologique .....	17
2.2.1.1 Représentation pyramidale .....	17
2.2.1.2 Les pyramides d'adjonction .....	19
2.2.2 L'approche multi résolution de l'algorithme MIP .....	20
2.2.2.1 Distributivité de la projection avec l'opérateur d'addition .....	21
2.2.2.2 Distributivité de la projection avec les opérateurs de synthèse .....	22
2.2.2.3 Schéma de reconstruction progressive de la projection MIP .....	23
2.3 Discussion sur les différentes méthodes .....	24
2.3.1 Critique de l'algorithme de Roerdink .....	24
2.3.1.1 Mauvaise représentation .....	25
2.3.1.2 Grosse consommation de mémoire .....	27
2.3.1.3 Direction de travail proposé par l'auteur .....	28
2.3.2 Nouvelle approche envisagée .....	28
CHAPITRE 3 SCHÉMAS DE DÉCOMPOSITIONS NON LINÉAIRES .....	30
3.1 Le schéma général de Heijmans et Goutsias .....	30
3.1.1 Schéma de décomposition couplée en ondelettes .....	31

3.1.1.1	Condition de parfaite reconstruction .....	32
3.1.1.2	Condition de non redondance .....	32
3.1.2	Schéma de décomposition découplée en ondelettes .....	34
3.1.3	Les ondelettes de Haar morphologiques [28] .....	36
3.2	Le schéma lifting .....	36
3.2.1	Extensions des schéma de décompositions en ondelettes .....	37
3.2.2	Lifting d'ondelettes morphologiques .....	38
3.2.2.1	Le lifting de prédiction .....	38
3.2.2.2	Le lifting de mise à jour .....	39
3.2.2.3	Lifting de prédiction et mise à jour .....	40
3.2.2.4	Un exemple : Le Max lifting [28] .....	41
CHAPITRE 4	DÉCOMPOSITION PROPOSÉE .....	44
4.1	Schéma de décomposition proposé .....	45
4.1.1	Formalisme de décomposition couplée en ondelette .....	46
4.1.1.1	Vérification de la condition de parfaite reconstruction .....	48
4.1.1.2	Vérification de la condition de non-redondance .....	48
4.1.2	Formalisme de décomposition découplée en ondelette .....	49
4.1.3	Exemple numérique .....	51
4.1.4	Application au cas tridimensionnel .....	52
4.2	Intérêt de la décomposition .....	53
4.2.1	Capacité de sélectivité .....	53
4.2.2	Importance de contribution de chaque sous-volume .....	54
4.2.2.1	Premier niveau de décomposition .....	54
4.2.2.2	Plusieurs niveaux de décomposition .....	55
CHAPITRE 5	PREMIÈRE APPROCHE MULTI-RÉSOLUTION DU MIP .....	57
5.1	Formulation théorique .....	57
5.1.1	Projection MIP des ensembles issus de la décomposition .....	57
5.1.2	Reconstruction progressive .....	58
5.1.2.1	Permutation de la projection avec les opérateurs de synthèse .....	59
5.1.2.2	Évaluation de l'erreur .....	62
5.2	Résultats .....	66
5.2.1	Première expérience .....	67
5.2.1.1	Une seule décomposition .....	67
5.2.1.2	Plusieurs décompositions .....	68
5.2.2	Deuxième expérience .....	69
5.2.3	Troisième expérience .....	70
5.3	Conclusion .....	72
CHAPITRE 6	DEUXIÈME APPROCHE .....	73
6.1	Formulation théorique .....	73
6.2	Sélection des sous ensembles .....	74
6.3	Description de l'algorithme .....	75



6.3.1	Prétraitement .....	75
6.3.2	Rendu.....	77
6.4	Résultats .....	77
6.4.1	Projection axiale .....	77
6.4.2	Projection dans n'importe quelle direction de l'espace.....	81
6.4.3	Autres résultats .....	82
6.4.3.1	Cinq décompositions .....	82
6.4.3.2	Autre image volumique .....	82
6.5	Avantages de la méthode.....	83
6.6	Améliorations et perspectives.....	84
6.6.1	Décomposition non directionnelle.....	84
6.6.2	Utilisation d'algorithmes de codage performants.....	85
6.6.3	Extension à d'autres types de rendu .....	86
CONCLUSION .....		87
ANNEXES		
1	: Exemples de rendu volumique.....	90
2	: Démonstrations et encadrement de l'erreur .....	95
3	: Première approche : expérience 1 .....	101
4	: Première approche : expérience 2 .....	104
5	: Première approche : expérience 3 .....	107
6	: Deuxième approche.....	110
7	: Deuxième approche : cinq décompositions .....	117
8	: Deuxième approche : image "torax" .....	119
TABLEAUX :		
1.	Comparaison entre les pourcentages de données initiales utilisés pour obtenir 98% du résultat final . .....	81
BIBLIOGRAPHIE .....		123

## LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1 Analyse multi résolution par ondelette d'un signal 2D .....	4
Figure 2 Structure de données proposée par Lukas Mroz.....	11
Figure 3 Projection MIP après opération de cisaillement .....	15
Figure 4 Décomposition pyramidale sur deux niveaux.....	18
Figure 5 Reconstruction pyramidale sur deux niveaux.....	19
Figure 6 Projection MIP des différents volumes issus d'une décomposition pyramidale faite sur un seul niveau.....	26
Figure 7 Projection MIP des différents volumes issus d'une décomposition pyramidale faite sur deux niveaux .....	26
Figure 8 Projection MIP du volume original .....	27
Figure 9 Transformation couplée en ondelettes .....	31
Figure 10 Décomposition en ondelettes sur 3 niveaux .....	33
Figure 11 Reconstruction couplée en ondelettes sur 3 niveaux .....	33
Figure 12 Transformation découplée en ondelettes .....	34
Figure 13 Reconstruction découplée en ondelettes sur 3 niveaux .....	36
Figure 14 Lifting de prédiction et de mise à jour.....	41
Figure 15 Décomposition par Max Lifting .....	43
Figure 16 Schéma de décomposition en ondelette couplée de la transformation proposée .....	47
Figure 17 Schéma de reconstruction en ondelettes couplées de la décomposition proposée .....	48
Figure 18 Schéma de reconstruction en ondelette découplées.....	50
Figure 19 Schéma de décomposition (un niveau de décomposition) d'un volume en 8 sous-volumes. Le sous-volume 1 contient les maximums locaux. ....	55
Figure 20 Schéma de décomposition (plusieurs niveaux de décomposition) d'un volume en sous-volumes.....	56
Figure 21 MIP progressif après une décomposition .....	68
Figure 22 MIP progressif après quatre décompositions.....	69

Figure 23	MIP progressif à approximation limitée après 4 décompositions .....	70
Figure 24	MIP progressif avec filtrage et calculé avec 33% des données du volume initial .....	71
Figure 25	Reconstruction progressive après 2 décompositions .....	78
Figure 26	Reconstruction progressive après 4 décompositions .....	79
Figure 27	Rapidité de convergence selon le nombre de décomposition .....	80
Figure 29	Visualisation d'une tête avec la technique de visualisation par surface .....	91
Figure 30	Rendu volumique semi-transparent d'une tête .....	92
Figure 31	Visualisation d'une tête avec la technique de lancer de rayon avec effet d'opacité .....	92
Figure 32	Visualisation d'une tête avec la technique de splatting .....	93
Figure 33	Visualisation d'un crâne avec la technique de MIP .....	94
Figure 34	Comparaison des résultats obtenus avec le MIP progressif après une puis deux décompositions .....	102
Figure 35	Comparaison des résultats obtenus avec le MIP progressif après trois puis quatre décompositions .....	103
Figure 36	Comparaison des résultats obtenus avec le MIP progressif et approximation partielle après une puis deux décompositions .....	105
Figure 37	Comparaison des résultats obtenus avec le MIP progressif et approximation partielle après deux puis trois décompositions .....	106
Figure 38	Comparaison des résultats obtenus avec le MIP progressif et approximation contrôlée après deux puis trois décompositions .....	108
Figure 39	Comparaison des résultats obtenus avec le MIP progressif et approximation contrôlée après quatre décompositions .....	109
Figure 40	Image de la projection MIP sur le volume initiale .....	111
Figure 41	Reconstruction progressive après 4 décompositions .....	112
Figure 42	Reconstruction progressive après 3 décompositions .....	113
Figure 43	Reconstruction progressive après 2 décompositions .....	114
Figure 44	Reconstruction progressive après 1 décomposition .....	115
Figure 45	Image de la projection MIP sur le volume initial dans la direction la plus éloignée des 3 axes de l'espace .....	116

Figure 46	Image de la projection MIP avec 27 % des données initiales dans la direction la plus éloignée des 3 axes de l'espace. 4,4 % des coefficients sont inexacts.....	116
Figure 47	Reconstruction progressive après 5 décompositions .....	118
Figure 48	MIP sur le volume « Thorax » original .....	120
Figure 49	MIP axiale du volume «Thorax » obtenue à 98 % des coefficients exacts avec 25 % des données initiales .....	121
Figure 50	MIP obtenue à 95 % des coefficients exacts avec 27 % des données initiales, projection à 45 degrés des axes de l'espace .....	122

## LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES

ARM	Angiographie par Résonance Magnétique
IRM	Imagerie par Résonance Magnétique
CT	<i>Computed Tomography</i>
EZW	<i>Embedded Zero trees of Wavelet coefficients</i>
SPITH	<i>Set Partitioning In Hierarchical Trees</i>

## **CHAPITRE 1**

### **INTRODUCTION**

L'augmentation des capacités de calcul et de mémoire des ordinateurs a permis l'essor des algorithmes de visualisation volumique. Cependant, dans le contexte médical, les équipements d'acquisition d'images de plus en plus précis, génèrent des données dont le volume est de plus en plus large. Par exemple, la tomographie, une technique couramment utilisée, enregistre des données tridimensionnelles (3D) qui représentent généralement le volume anatomique ou la perfusion d'un organe. Un examen de tomographie par résonance magnétique ou par rayons-x peut générer entre 100 et 300 images, soit un minimum de 50 méga-octets. Aussi, l'interprétation des images 3D nécessite un processus de visualisation. Souvent cela fait intervenir de lourds calculs sur des ensembles de données de plus en plus gros. Pourtant, les besoins dans un contexte médical nécessitent une visualisation rapide, et même parfois en temps réel. De plus, les images doivent être de très bonne qualité pour qu'elles puissent être le support d'un diagnostic fiable. Le développement d'outils efficaces de représentation de données comme les ondelettes prend de l'intérêt dans ce contexte.

L'un des principaux intérêts de l'imagerie 3D dans le contexte médical est de pouvoir visualiser l'intérieur du corps humain sans intervention chirurgicale. Cela permet de diagnostiquer facilement et de contrôler les actions thérapeutiques. Depuis près d'un siècle, les techniques d'acquisition des images de l'intérieur du corps humain se sont diversifiées et ont beaucoup évoluées. Le scanner apparaît en 1927. Cette technique permet d'obtenir des coupes nettes d'un volume. En 1971, l'imagerie par résonance magnétique (IRM) complète la technique des Rayons X. L'acquisition est plus précises, et devient sans danger. De nos jours, la tomographie assistée par ordinateur (CT) permet d'enregistrer de plus en plus de données avec une grande précision. Il est ainsi possible d'obtenir des modèles très précis.

De nombreux algorithmes ont été développés en visualisation volumique depuis les années 80. Cependant, on distingue principalement trois catégories de techniques. Pour chacune d'elles, de nombreuses alternatives se sont ajoutées :

- La technique de visualisation par surface (*Marching Cube*) consiste à créer des surfaces avec les voxels de même valeur. Les surfaces ainsi obtenues sont affichées avec le matériel graphique. Un exemple de résultat que l'on obtient avec ce type de rendu est visible dans l'annexe 1. L'avantage de cette méthode est qu'elle utilise le matériel graphique qui permet une visualisation rapide. Elle permet de visualiser les iso surfaces (surfaces d'intensité homogène) efficacement. Mais beaucoup de polygones doivent être enregistrés. Lorsque les iso surfaces ne sont pas très nettes, ou lorsque l'image est bruitée, cette technique apporte de nombreux problèmes d'imprécision. Il est de plus impossible de visualiser les progressions d'intensité.

- Les techniques de visualisation en espace image sont les algorithmes qui utilisent le lancer de rayons. Cela consiste à lancer un rayon à partir de chaque pixel de l'image de projection. Les intensités des voxels traversés par le rayon sont ajoutées en fonction de leur coefficient d'opacité. Une fonction de transfert est appliquée à l'intensité pour attribuer une couleur à chaque pixel. Les degrés d'intensité sont ainsi visibles. Cet algorithme est efficace lorsque le volume est opaque. En effet, il est possible d'écourter le parcours des rayons. Mais c'est en général un algorithme coûteux en temps de calcul. Toutes les données volumiques doivent être stockées en mémoire. Ces techniques permettent un accès simple et rapide aux données, mais certains voxels sont parcourus plusieurs fois et d'autres jamais. Le MIP (Maximum Intensity Projection) est un algorithme de lancer de rayons simplifié. Seule la valeur maximum rencontrée par le rayon est conservée sur l'image de projection. Cette technique est l'objet

de notre étude et va être expliqué plus précisément dans les paragraphes qui suivent. Un exemple d'un rendu obtenu par MIP est donné dans l'annexe 1.

- Les techniques de visualisation en espace objet permettent de considérer tous les voxels une seule fois, mais impliquent plus de calculs lors du processus de projection. Elles permettent aussi d'éviter de considérer les trous, le fond. Il est possible d'utiliser des précalculs, faire des compressions, faire des prétraitements sur les données, éliminer les données non contribuant. Le « splatting » fait partie de cette catégorie d'algorithmes. Cela consiste à calculer préalablement la projection de chaque voxel en fonction du nombre de pixels qu'il intersecte. Le rendu consiste à projeter chaque voxel en utilisant les précalculs et en ajoutant les informations de transparence et de couleur. Un exemple de rendu obtenue par « *splatting* » est présenté dans l'annexe 1.

La transformée en ondelette s'est révélée être un outil efficace de représentation de donnée. Elle consiste à décomposer un signal en une somme de fonctions élémentaires (bases d'ondelette) qui dérivent toutes d'une même fonction (ondelette mère). Cela permet une représentation temps-fréquence d'un signal. Ce mode de représentation compact des données permet une analyse multi résolution du signal plus efficace que celle obtenue par représentation pyramidale. La notion d'analyse multi résolution par ondelettes a été introduite par S.Mallat et Meyer ([1, 2]). C'est un outil mathématique qui permet de construire aisément des bases orthonormées d'ondelettes. Le principe consiste à décomposer le signal à analyser  $s \in V_0$  en une suite  $s_1 \in V_1$  de coefficients d'approximation et en une suite  $d_1 \in W_1$  de coefficients de détails tels que  $V_0 = V_1 \oplus W_1$ . Chaque suite d'approximation  $s_j \in V_j$  se décompose à nouveau en approximations  $s_{j+1} \in V_{j+1}$  et en détails  $d_{j+1} \in W_{j+1}$  tels que  $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$ . À chaque itération de cette décomposition, les coefficients de détails correspondent aux coefficients en ondelettes du signal à une échelle donnée. Les coefficients en ondelettes permettent de représenter



les détails gagnés ou perdus lors du passage d'une échelle à une échelle à l'autre. L'ondelette peut donc être vue comme un filtre passe-bande qui extrait des informations (les coefficients de détails) dans une bande de fréquence donnée. Cette bande de fréquence varie avec le niveau de la décomposition. Le signal résultant après extraction des coefficients de détails, correspond à un signal représentant les basses fréquences (coefficients d'approximation). Un exemple d'analyse multi résolution par ondelette d'une image est donné à la figure1.

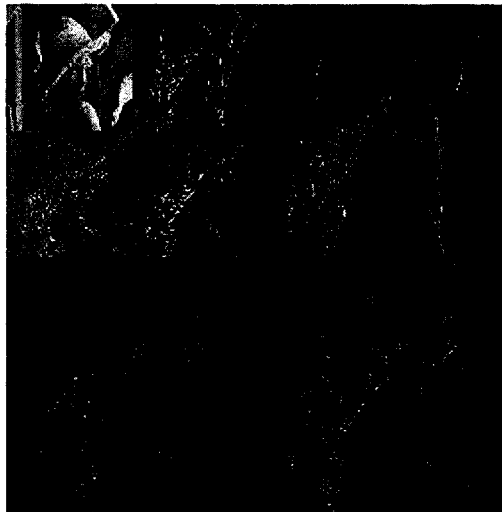


Figure 1 Analyse multi résolution par ondelette d'un signal 2D

La théorie des ondelettes permet d'avoir des bandes de fréquence d'analyse indépendantes à chaque niveau de résolution (principe des bases orthonormées). Ainsi la redondance est minimisée, permettant un codage efficace grâce à un faible nombre de coefficients.

Quelques auteurs ([3-13]) se sont intéressés à la représentation par ondelettes dans les calculs de visualisation. On distingue principalement deux avantages liés à son utilisation qui permettent d'améliorer les algorithmes de rendu :

- Les ondelettes sont très utilisées en compression. En effet, une grande majorité des coefficients de détails sont petits et certains peuvent être négligés sans détérioration visible du signal final. Des méthodes efficaces de codage des coefficients en ondelettes peuvent être utilisées comme l'EZW [14] ou le SPITH [15]. Ainsi, la transformation en ondelette est utilisée comme outil de compression [3] pour pallier le problème de gestion de la mémoire dans les algorithmes de rendu.

- Elles permettent aussi un calcul progressif dans des processus très coûteux. En effet, certaines transformations peuvent être appliquées de manière parallèle sur l'ensemble des sous espaces résultant de la transformation en ondelettes. La transformation appliquée sur les coefficients d'approximation seulement, donne un bon aperçu du résultat final, tout en considérant un nombre réduit de données. Ainsi, un premier résultat approximatif d'une transformation très coûteuse peut être obtenu rapidement. Le résultat final est obtenu par ajout progressif des informations obtenues après transformation sur les espaces de détails. Ainsi la transformée en ondelette s'est révélée intéressante dans les techniques de « *splatting* » [4]. En effet, elle permet d'obtenir un rendu à partir des données transformées; il n'est pas nécessaire de reconstruire le volume avant d'effectuer les calculs de visualisation. Cependant, cette méthode a pour limite de ne pas pouvoir intégrer les informations d'opacité dans le rendu et nécessite de calculer préalablement l'éclairement sur le volume si on ne veut pas de rendu radiographique (voir image de rendu type radiographique à l'annexe 1).

Ce travail est focalisé sur la MIP (*Maximum Intensity Projection*), une des méthodes de visualisation les plus intéressantes en imagerie médicale. Elle est basée sur la sélection d'une valeur maximum selon un rayon de projection. Cette méthode a été développée comme alternative au lancer de rayons classique. Elle a l'avantage d'être plus rapide. En effet, elle ne nécessite aucun calcul de luminosité ou d'intégration. Elle est très utilisée

en imagerie médicale pour la visualisation des vaisseaux sanguins. Cette habileté à détecter les vaisseaux sanguins a une importance énorme pour beaucoup d'applications en imagerie médicale. Les images scanners MRI ou CT peuvent être utilisées pour obtenir des données volumiques qui permettent l'extraction des structures vasculaires. Le MIP exploite le fait que les valeurs des données des structures vasculaires obtenues par angiographie sont supérieures aux valeurs des données des tissus environnants. En sélectionnant les valeurs maximums, les structures vasculaires sont capturées.

L'objectif du travail est de tirer partie de la théorie des ondelettes afin d'améliorer l'algorithme de manière significative. Aucun algorithme de MIP combinant l'utilisation d'ondelettes n'a encore été développé jusqu'à présent. Cela s'explique par le fait, que les ondelettes font initialement intervenir des opérations linéaires. L'aspect non linéaire de la transformation MIP rend difficile leur utilisation. Cependant, l'extension aux ondelettes non linéaires a été développée par quelques auteurs dans la littérature ([16]-[28]). Elles permettent, en général, la conservation des contours lors du passage à une résolution inférieure dans l'analyse multi-résolution. Ceci permet d'avoir un signal d'approximation beaucoup plus représentatif du signal initial, et ainsi des coefficients de détails plus petits. H. J. A. M. Heijman et J. Goutsias présentent dans leur article [28], un schéma général de décomposition en ondelettes. Il englobe le schéma classique de décomposition linéaire et les cas non linéaire.

Parallèlement, de nombreux auteurs ont développé des algorithmes performants du MIP. En particulier Lukas Morz [29] [30] propose un algorithme très rapide permettant la visualisation en temps réelle. L'efficacité de sa méthode est basée sur un prétraitement, et une représentation de données particulière. Aussi, Jos B. T. M. Roerdink [31] présente une approche intéressante basée sur l'utilisation de pyramide morphologique [32]. Par un raisonnement rigoureux, il démontre une forme progressive du calcul MIP. Cependant, les performances de l'algorithme résultant sont limitées.

L'objectif de ce travail, est de proposer une représentation de données basée sur le modèle de la décomposition en ondelette, et qui permette une amélioration notable de l'algorithme MIP. En effet, nous allons présenter une décomposition basée sur le schéma général de décompositions en ondelettes [28] présenté par H. J. A. M. Heijman et J. Goutsias. Celle-ci permettra d'effectuer une compression des données volumiques par un prétraitement efficace, d'une part. D'autre part, elle permettra de réaliser le processus de visualisation de manière progressive. Ainsi, les performances de l'algorithme seront améliorées considérablement et dépasseront celles obtenues avec les meilleurs algorithmes de projection MIP développés jusqu'à ce jour. La solidité du modèle de décomposition en ondelette offre flexibilité, simplicité et fiabilité. Un tel algorithme essaie de répondre aux besoins que l'on peut retrouver dans le contexte médical. En effet lors d'un processus de visualisation fait dans le but d'établir un diagnostic, il est nécessaire d'obtenir très rapidement les projections faites dans les différents axes de l'espace afin d'avoir une vitesse de rotation suffisamment rapide pour l'interprétation des images 3D. Plus la vitesse de rotation est grande, moins il est nécessaire d'avoir une image parfaite de chacune des projections pour garder l'effet désiré. Ces projections approximatives peuvent donc être calculées sur un nombre de donnée réduit, obtenu grâce à une décomposition du volume initiale efficace. L'image parfaite de projection peut être ensuite obtenue par ajout progressif des informations des données restantes qui représente le volume.

Le deuxième chapitre présente plus particulièrement le MIP (*Maximum Intensity Projection*). Il expose les différents algorithmes jusqu'alors développés, et particulièrement ceux utilisant une représentation hiérarchique ou morphologique des données. Le troisième chapitre présente un schéma général de décomposition en ondelettes qui inclue les transformations non linéaires. Le quatrième chapitre expose la représentation de données proposée s'appuyant sur le schéma général présenté dans le chapitre précédent. Enfin, le cinquième et le sixième chapitre, présentent deux approches permettant un calcul progressif du MIP utilisant la décomposition proposée dans le

chapitre 4. La deuxième approche du cinquième chapitre donne des résultats intéressants.

## **CHAPITRE 2**

### **LES TECHNIQUES DE PROJECTION MIP**

Le moyen le plus direct pour obtenir le MIP est d'effectuer un lancer de rayons et de chercher la valeur maximum des échantillons rencontrés. Cependant, plusieurs auteurs ont développé différentes stratégies pour accélérer la vitesse de l'algorithme. L'enjeu est de pouvoir visualiser des volumes en temps réel tout en gardant une qualité d'image satisfaisante. En effet, la qualité des images est un facteur important pour l'exploitation médicale. Le diagnostic d'un médecin doit se baser sur des images fiables.

Dans une première partie, les principales techniques d'optimisation développées dans la littérature sont présentées. Puis l'algorithme de Jos B. T. M. Roerdink [31] utilisant les pyramides morphologiques est détaillé. Pour finir, une synthèse sur l'ensemble de ces techniques est faite afin de situer les enjeux de ce travail.

#### **2.1 Méthodes d'optimisation du MIP**

Une des optimisations souvent utilisées pour le rendu volumique lorsqu'il y a parcours de rayon consiste à arrêter le parcours du rayon prématurément lorsqu'une valeur seuil est atteinte. Cette optimisation ne peut être faite avec le MIP. En effet, si la valeur seuil choisie est inférieure à la valeur maximale du volume, le parcours du rayon peut être arrêté avant qu'il ait traversé des voxels de valeur maximale. Seule la valeur maximale du volume peut être choisie comme valeur seuil, mais elle peut être présente qu'une seule fois dans le volume. Ce choix n'apportera donc que peu d'amélioration de temps de calcul.

Cependant, d'autres méthodes ont été développées. Chacune d'elle essaie de combiner la rapidité de calcul avec une qualité de résultat optimale. Mais souvent l'amélioration d'un de ces critères se fait au détriment de l'autre. En effet, plusieurs niveaux de qualité liés à

des calculs d'interpolation plus ou moins coûteux sont envisageables pour le calcul des projections :

- La solution la plus juste mais la plus coûteuse est la celle qui consiste à calculer analytiquement la valeur maximum pour chaque intersection du rayon [34].
- La méthode qui consiste à re-échantillonner les valeurs des données selon le rayon de projection en utilisant une interpolation linéaire est couramment utilisée en lancer de rayons. Son efficacité dépend du nombre d'interpolations qui peuvent être évitées sans affecter le résultat [34-35].
- Enfin, la méthode qui consiste à prendre la valeur de l'échantillon le plus proche sur le parcours du rayon est la plus rapide, mais laisse parfois du bruit dû à l'aliassage [36].

Dans les prochains paragraphes, nous présentons les principaux algorithmes de la littérature qui ont apporté des performances intéressantes au MIP. Les plus importants sont détaillés.

### **2.1.1 L'algorithme de Lukas Mroz [29]**

Lukas Mroz a développé l'algorithme le plus efficace à ce jour. Sa méthode consiste à effectuer, dans un premier temps, un prétraitement de façon à éliminer les voxels non contribuant. Ensuite, les données sont stockées dans une structure particulière qui permet d'effectuer la projection des voxels de haute intensité en premier.

#### **2.1.1.1 Prétraitement**

Les données volumiques contiennent un pourcentage non négligeable de voxels qui ne contribuent jamais à la projection MIP. Un voxel  $v$  n'est jamais visible si tous les

rayons possibles passant par ce voxel rencontrent un autre voxel  $w$  tel que  $d(w) \geq d(v)$  avec  $d(v)$  la valeur d'intensité du voxel  $v$ . Lukas Morz analyse récursivement le voisinage  $5*5$  de chaque voxel afin d'éliminer les voxels non contributants. Dans ses exemples, l'auteur arrive à éliminer jusqu'à 55% des données initiales.

### 2.1.1.2 Storage

Les voxels restants sont ensuite stockés dans une structure de données particulière. Ce sont les coordonnées de chaque voxel qui sont enregistrées dans un tableau unidimensionnel. Ce moyen permet de tirer partie de l'élimination des voxels dans l'étape précédente.

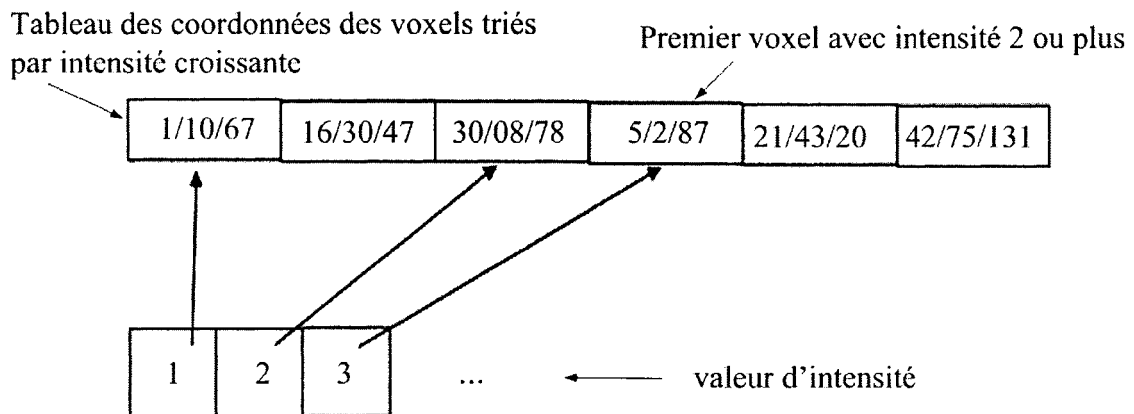


Figure 2 Structure de données proposée par Lukas Mroz

Comme l'explique la figure 2, les coordonnées sont rangées dans un tableau unidimensionnel, par ordre croissant selon la valeur du voxel auquel elles se réfèrent (tableau du haut de la figure 2). Chaque case du tableau contient les trois composantes codées des coordonnées d'un voxel. Un tableau d'index (tableau du bas de la figure 2) permet de connaître implicitement la valeur des voxels. Chaque élément de ce tableau est une référence à un élément du tableau de coordonnées. L'indice de l'élément dans le tableau d'index correspond à la valeur du voxel auquel l'élément du tableau d'index se



réfère dans le tableau de coordonnées. Lorsque un groupe de voxels ont la même valeur, ils sont rangés les uns à la suite des autres dans le tableau de coordonnées. Seul le premier voxel du groupe rencontré dans le parcours du tableau est pointé par un élément du tableau d'index.

### 2.1.1.3 Le rendu

Les voxels du volume sont traités dans un ordre spatial arbitraire. Le rendu s'effectue en appliquant une matrice de transformation sur les coordonnées stockées dans le tableau dans l'ordre décroissant de leurs valeurs. Ainsi le rendu des objets de plus haute intensité est obtenu très rapidement. Ce sont les données qui ont le plus d'impact dans l'obtention de l'image des projections. La projection orthogonale  $P$  d'un point de l'espace tridimensionnel peut être exprimée comme la somme des projections indépendantes des composantes  $x$ ,  $y$  et  $z$  :

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

Ainsi, les projections possibles de chaque voxel peuvent être pré calculées et enregistrées. Cette approche permet une visualisation très rapide de la projection MIP. Mais la qualité du résultat n'est pas optimale. Etant donné que chaque voxel est projeté sur exactement un pixel, il peut y avoir des trous sur l'image résultante dus à l'alissage.

Dans un deuxième article [30], Mroz propose des améliorations. Ainsi, pour améliorer la qualité de la projection, l'image de projection est subdivisée en  $4 \times 4$  sous éléments. La projection d'un seul voxel apporte différentes contribution dans chaque sous élément de l'image de projection. Pour chaque forme que peut prendre la projection d'un seul voxel, les contributions sont pré calculées et enregistrées afin d'économiser du temps de calcul.

La rapidité de l'algorithme de Mroz se base d'une part sur le fait que les voxels d'intensité maximum sont traités en premier. Ainsi, beaucoup de calculs inutiles de contribution sont éliminés. En effet, seules les contributions des voxels dont la valeur est supérieure à celle des pixels sur lesquels ils se projettent, sont calculées. L'auteur arrive à réduire de 98% les calculs de contribution dans ses exemples. D'autre part, la rapidité de l'algorithme se base sur un prétraitement qui élimine un grand nombre de données à traiter. Aussi, dans son deuxième article [30], Lukas Mroz arrive à réduire jusqu'à 70% le nombre de données initiales dans la phase de pré-traitement. Cependant cette réduction n'est possible si l'on considère qu'une seule direction de projection. Il divise alors l'espace en 12 sous-espaces dont chacun correspond à un intervalle de direction de projection dans l'espace. Ainsi pour chaque sous-espace, il suffit de traiter 30% des données initiales pertinentes pré-enregistrées. Mais la mémoire pour stocker l'ensemble des données nécessaires à la projection MIP dans toutes les directions de l'espace est alors supérieure à sept fois celle utilisée normalement pour stocker le volume initial.

### **2.1.2 Méthode basée sur le codage de distances de Zuiderveld [35]**

Le principe de la méthode proposée par Zuiderveld consiste à limiter le nombre de calculs d'interpolation tri-linéaire coûteux, aux régions du volume les plus pertinentes. Pour cela, il utilise différentes techniques :

- Un volume intermédiaire d'une résolution inférieure store les maximums locaux pris dans le voisinage de chaque voxel. Si la valeur dans le volume intermédiaire n'est pas supérieure à la valeur courante du rayon, l'interpolation tri-linéaire n'est pas effectuée. 25% à 55% des interpolations peuvent être ainsi évitées tout en gardant une bonne qualité de l'image finale.
- La première idée est améliorée par ajout d'un processus d'initialisation des rayons. Le volume de résolution inférieure composé des minimums locaux pris dans le voisinage de chaque voxel permet de calculer rapidement une première

image basse résolution. Cette première approximation du résultat, permet d'initialiser chaque rayon pour un deuxième calcul plus précis. 20% à 60% des interpolations peuvent être ainsi évitées tout en gardant une bonne qualité de l'image finale

- Enfin, dans une dernière partie l'auteur propose d'utiliser une représentation du volume modifiée pour sélectionner les points où il est nécessaire d'effectuer l'interpolation tri-linéaire. Il utilise un codage par distance avec des voxels spécifiques. Cette technique demande à identifier préalablement les voxels les plus importants - c.a.d. les voxels dont l'intensité est la plus élevée. Ensuite une transformation est utilisée pour créer la nouvelle représentation du volume qui contient pour chaque voxel, la distance approximative avec le plus proche voxel important. 60% à 95% des interpolations peuvent être ainsi évitées, mais la qualité de l'image finale est détériorée.

### 2.1.3 Méthode basée sur la déformation de l'espace de Cai et Sakas [36]

C'est cette méthode qui a montré les meilleurs résultats dans l'accélération des techniques de rendu. Plusieurs auteurs ont tiré avantage de cette méthode pour l'amélioration du MIP. La méthode consiste à décomposer la matrice de projection en deux transformations distinctes :

- a. la transformation de cisaillement (shear transformation);
- b. la transformation de déformation (warp transformation).

Les données volumiques sont d'abord transformées par la matrice de cisaillement. Ensuite chaque voxel est projeté selon son empreinte pré-calculée (technique « *splatting* ») afin d'obtenir une première image intermédiaire de projection. L'opération de cisaillement fait en sorte que la projection qui suit est axiale. Les calculs sont ainsi simplifiés. Enfin, la transformation de déformation est appliquée sur l'image intermédiaire afin d'obtenir l'image finale. Le problème est qu'il est difficile d'appliquer

directement la technique de « *splatting* » au MIP. En effet, la technique classique consiste à accumuler sur chaque pixel de l'image de projection, la contribution de chaque voxel. Lorsque c'est la valeur maximum des voxels rencontrés par le rayon de projection qui est conservée sur un pixel, il est difficile d'évaluer une contribution de voxel en fonction de la façon dont le rayon de projection le traverse. En effet, les voxels se trouvent sous forme de parallélépipède après l'opération de cisaillement. Si l'on veut éviter les effets d'aliassage, il est important de quantifier la contribution d'un voxel en fonction de la façon dont le rayon de projection le traverse. L'auteur utilise un plan intermédiaire de la même taille que le plan de projection, pour évaluer tranche par tranche la contribution des voxels pour chaque pixel. Pour chaque tranche, les voxels sont projetés sur un plan intermédiaire afin d'évaluer leur contribution pour chaque pixel. Ce processus est illustré par la figure 3.

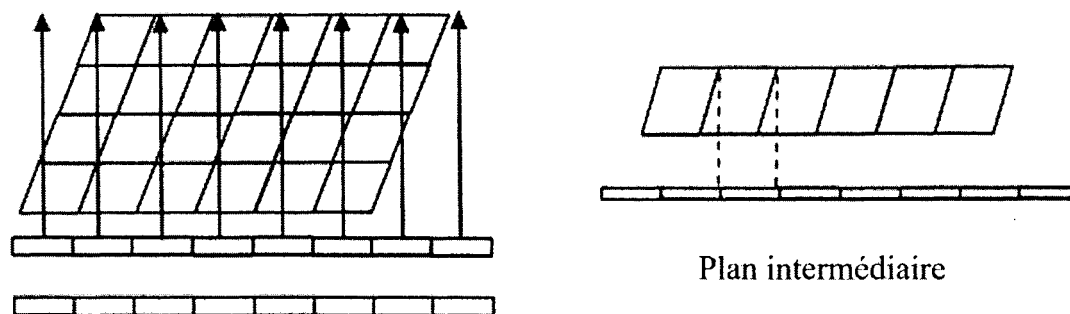


Figure 3 Projection MIP après opération de cisaillement

Dans le même article l'auteur développe différents modes de *splatting* qui permettent de varier la vitesse d'exécution au détriment de la qualité de rendu.

#### 2.1.4 Méthode utilisant le matériel graphique [37]

Heidrich utilise la fonction de la carte graphique de rendu de polygone pour effectuer le MIP. En effet, les cartes graphiques 3D sont aujourd'hui très performantes. Elles permettent de faire le rendu de cent mille polygones à la seconde. La méthode

usuellement utilisée pour éliminer les surfaces cachées par ces cartes, est celle basée sur les tampons de profondeur. Ainsi, l'algorithme proposé par Heidrich consiste à extraire des données initiales plusieurs iso-surfaces de différentes valeurs d'intensité. Puis la géométrie est changée de façon à attribuer la valeur de l'intensité du polygone comme indicateur de profondeur, avant d'effectuer le rendu par la carte graphique. On obtient ainsi un rendu MIP.

### **2.1.5 Diverses autres méthodes d'optimisation**

L'utilisation de structures hiérarchiques comme l'octree utilisée par Marc Levoy [38] permet de traiter d'un seul bloc les données de même intensité. L'organisation des données en bloc proposée par Steven Parker [39] permet d'optimiser l'accès à la mémoire. Il développe un algorithme à traitement parallèle du lancer de rayon.

## **2.2 La décomposition pyramidale de Roerdink [31]**

Jos B. T. M Roerdink propose une méthode de décomposition de l'algorithme MIP par décomposition pyramidale. Le principe consiste à effectuer une décomposition pyramidale du volume. Ensuite, l'algorithme MIP est appliqué sur chaque élément de la pyramide de façon à obtenir la décomposition pyramidale de l'image de la projection.

Pour arriver à cela, le choix des filtres de décomposition est très important. En effet, la projection MIP se base sur une opération non linéaire : le maximum. L'auteur propose donc une représentation pyramidale du volume à partir d'une analyse multi- résolution morphologique. Il utilise l'opération d'érosion comme filtre d'analyse combinée avec une opération de dilatation comme filtre de synthèse. Ainsi, l'opérateur MIP (calcul du maximum) peut être interchangé avec l'opérateur de synthèse. Cela permet de pouvoir calculer le MIP dans un premier temps sur les données de résolution inférieure. Puis il suffit d'appliquer l'opérateur de synthèse 2D afin de reconstruire progressivement la résolution complète. Cet algorithme est expliqué en détail, en commençant par une

présentation de la décomposition pyramidale et du cas particulier des pyramides morphologiques d'adjonction.

### 2.2.1 Décomposition pyramidale morphologique

J. Goutsias [27] propose un schéma général de la décomposition pyramidale qui englobe le cas linéaire et le cas non linéaire. Dans un premier temps, ce schéma général est présenté. Puis le cas particulier des pyramides morphologiques d'adjonction est détaillé.

#### 2.2.1.1 Représentation pyramidale

$V_j$  est une famille d'espaces de représentation à différents niveaux de résolution  $j$  d'un signal.  $\psi_j^\uparrow$  est l'opérateur d'analyse permettant de passer de l'espace  $V_j$  à l'espace de résolution inférieur  $V_{j+1}$  tel que  $\psi_j^\uparrow : V_j \rightarrow V_{j+1}$ .  $\psi_j^\downarrow$  est l'opérateur de synthèse permettant de passer de l'espace  $V_{j+1}$  à l'espace  $V_j$  tel que  $\psi_j^\downarrow : V_{j+1} \rightarrow V_j$ . Pour un signal  $f_j \in V_j$ , sa représentation dans l'espace  $V_{j+1}$  est  $f_{j+1}$ . La décomposition pyramidale doit respecter la condition de reconstruction parfaite traduite mathématiquement par :

$$\forall f \in V_{j+1}, \psi_j^\uparrow \psi_j^\downarrow (f) = f \quad (2-1)$$

Elle est aussi appelée la condition de la décomposition pyramidale. Elle garantit la récupération de l'information perdue durant l'étape d'analyse. Ainsi le schéma de la décomposition pyramidale, illustré par la figure 4, du signal  $f$  est obtenu de la manière récursive suivante :

$$f_0 = f \quad (2-2)$$

$$f_{j+1} = \psi_j^\uparrow (f_j), j \geq 0$$

$$\hat{f}_j = \psi_j^\downarrow (f_{j+1}) = \psi_j^\downarrow (\psi_j^\uparrow (f_j))$$

$$d_j = f_j - \hat{f}_j$$

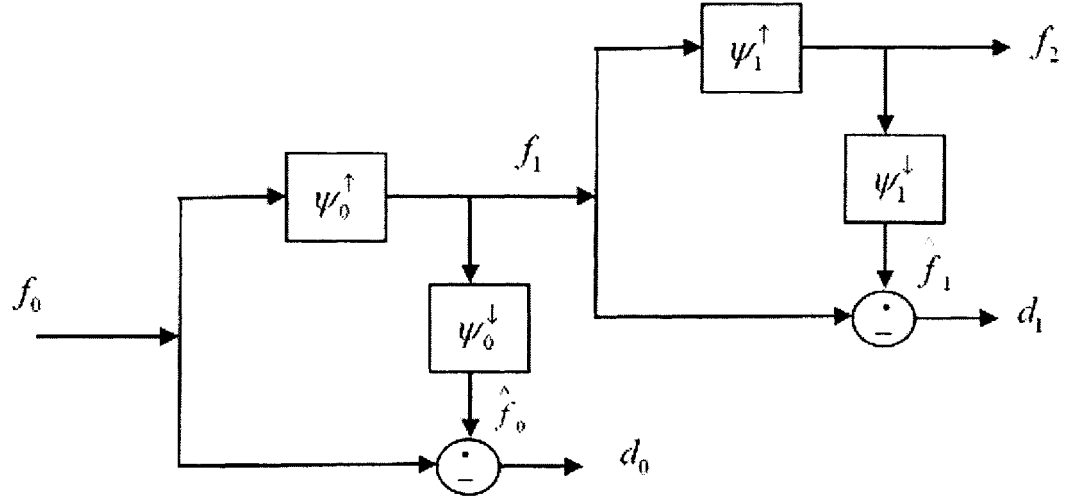


Figure 4 Décomposition pyramidale sur deux niveaux

La représentation pyramidale de niveau  $L$  du signal  $f$  est la séquence  $d_0, \dots, d_{L-1}, f_L$  où  $\{d_j\}$  sont les détails du signal et  $f_L$ , une représentation de basse résolution du signal.

L'opérateur  $\dot{-}$  représente l'opérateur de la soustraction généralisée. On suppose qu'il existe l'opérateur  $\dot{+}$  d'addition généralisée tel que :

$$\hat{f} \dot{+} (f \dot{-} \hat{f}) = f \text{ si } f \in V_j \text{ et } \hat{f} = \psi_j^\downarrow \psi_j^\uparrow (f).$$

La condition de la décomposition pyramidale (2-1) permet la reconstruction parfaite du signal  $f$ . Il est reconstruit de la manière récursive suivante :

$$f_j = \psi_j^\downarrow (f_{j+1}) \dot{+} d_j \text{ pour } j = L-1, L-2, \dots, 0. \quad (2-3)$$

Le schéma de la figure 5 illustre ce processus de reconstruction.

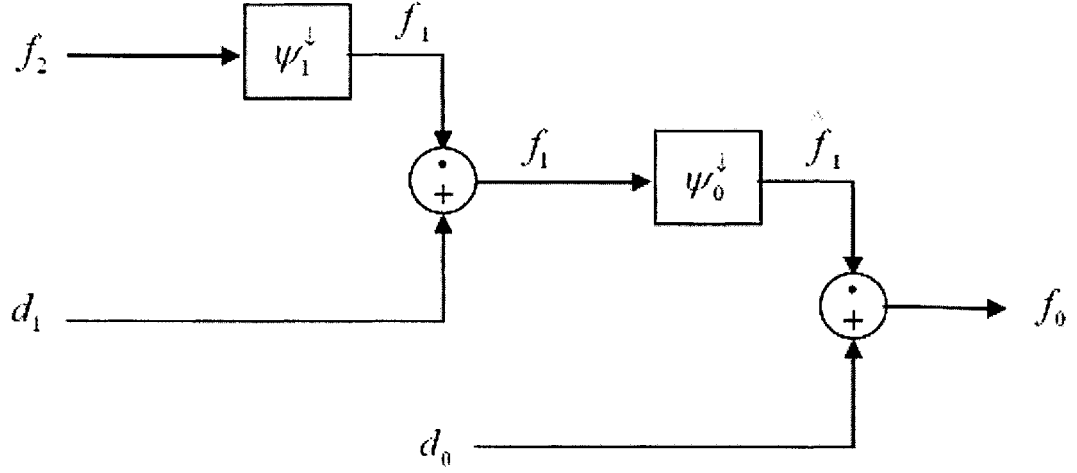


Figure 5 Reconstruction pyramidale sur deux niveaux

### 2.2.1.2 Les pyramides d'adjonction

Le cas particulier des pyramides d'adjonction est intéressant car il fait intervenir des opérateurs morphologiques. La phase d'analyse consiste en une érosion suivie d'un sous-échantillonnage, et la phase de synthèse d'une dilatation suivie d'un sur-échantillonnage. Les opérateurs de synthèse et les opérateurs d'analyse sont donc définis de la façon suivante :

$$\psi_A^\uparrow(f)(n) = \sigma^\uparrow \varepsilon_A(f)(n) = \bigwedge_{k \in A} f(2n+k) \quad (2-4)$$

$$\psi_A^\downarrow(f)(k) = \delta_A \sigma^\downarrow(f)(k) = \bigvee_{n \in A[k]} f\left(\frac{k-n}{2}\right) \quad (2-5)$$

$\delta_A$  et  $\varepsilon_A$  sont respectivement la dilatation et l'érosion avec l'élément structurant  $A$ .  $\sigma^\uparrow$  et  $\sigma^\downarrow$  sont respectivement le sous-échantillonnage et le sur-échantillonnage d'un facteur deux dans chaque dimension de l'espace.  $\bigwedge$  et  $\bigvee$  sont respectivement l'opérateur minimum pour tout les éléments  $k$  de  $A$  et l'opérateur maximum pour tous les éléments  $n$  de  $A[k]$ .  $A[k]$  est une partition disjointe de  $A$ .



Comme  $\psi_A^\downarrow \psi_A^\uparrow(f)$  est toujours inférieur ou égal à  $f$  et étant donné en ( 2-2 ), l'expression de la décomposition pyramidale, l'opérateur d'addition et de soustraction peuvent être défini par :

$$\overset{\bullet}{t+s} = t \vee s \quad (2-6)$$

$$\overset{\bullet}{t-s} = \begin{cases} t, & \text{si } t > s \\ \perp, & \text{si } t = s \end{cases} \quad (2-7)$$

$\vee$  est l'opérateur maximum.  $\perp$  est le plus petit élément de  $\Gamma$ . Si on suppose que  $\Gamma$  est un ensemble d'entiers non négatifs,  $\perp$  est égal à 0.

( 2-7 ) implique que les détails du signal  $d_j(n)$  sont égaux à  $f_j(n)$  sauf pour les cas où  $f_j(n)$  est égal à  $\psi_A^\downarrow \psi_A^\uparrow(f_j)(n)$ . En conséquence, les coefficients de détails ne sont pas « petits » lorsque la fonction structurante ne correspond pas exactement au signal. Pour la pyramide d'adjonction construite avec l'opérateur d'addition défini en ( 2-6 ), la reconstruction prend une forme particulière. Etant donné que  $\psi_A^\downarrow$  est une dilatation,  $\psi_A^\downarrow$  commute avec le maximum. On peut ainsi facilement déduire à l'aide des équations ( 2-3 ) et ( 2-5 ) :

$$f = \psi_A^\downarrow(f_L) \vee \bigvee_{k=0}^{L-1} \psi_A^{\downarrow k}(d_k) \quad (2-8)$$

$L$  est le niveau de décomposition de la pyramide et  $\psi_A^{\downarrow k}$  est k-ième composition de  $\psi_A^\downarrow$  par lui-même.

### 2.2.2 L'approche multi résolution de l'algorithme MIP

Roerdink utilise les pyramides d'adjonction morphologiques comme moyen de représentation multi résolution d'un volume. Par un raisonnement rigoureux, il arrive à

exprimer mathématiquement une forme progressive de projection MIP à partir de cette représentation des données. Le principe de son raisonnement consiste à prouver la distributivité de l'opérateur MIP par rapport à l'opérateur d'addition de la décomposition ( 2-6 ) d'une part, puis d'autre part, par rapport aux opérateurs de synthèse.

### 2.2.2.1 Distributivité de la projection avec l'opérateur d'addition

La projection MIP est définie mathématiquement de la façon suivante :

Soit l'ensemble de données d'un volume discrétisé  $f$ , dont les valeurs sont  $f(r,s,t)$  où  $(r,s,t) \in \mathbb{Z}^3$ .  $P_z(f)$  est la projection du voxel maximum selon l'axe  $z$  :

$$P_z(f)(r,s) = \bigvee_i f(r,s,t) \quad (2-9)$$

Étant donné que l'opérateur d'addition de la décomposition est le maximum ( 2-6 ),  $P_z$  est distributive par rapport à celui-ci car le  $\sup(\sup A, \sup B) = \sup(A \cup B)$ . Ainsi, il est possible d'exprimer  $P_z(f)$ , en utilisant l'équation de reconstruction pyramidale ( 2-8 ), de la façon suivante :

$$P_z(f) = P_z\left(\psi_A^{\downarrow L}(f_L)\right) \vee \bigvee_{k=0}^{L-1} P_z\left(\psi_A^{\downarrow k}(d_k)\right) \quad (2-10)$$

Cette équation permet de faire la reconstruction progressive par multi- résolution du MIP. En effet, il est possible d'obtenir l'image de projection MIP à partir d'une image approximatif  $P_z\left(\psi_A^{\downarrow L}(f_L)\right)$  que l'on raffine progressivement en apportant progressivement les informations de détails  $P_z\left(\psi_A^{\downarrow k}(d_k)\right)$ . Mais cette expression ( 2-10 ) ne permet pas d'être efficace d'un point de vue réduction de temps de calcul. En effet, pour calculer une projection à un certain niveau d'approximation  $j$ , il faudrait reconstruire  $f_L, d_{L-1}, \dots, d_j$  à pleine résolution dans un premier temps, puis appliquer l'opérateur du MIP  $P_z$ .

### 2.2.2.2 Distributivité de la projection avec les opérateurs de synthèse

Le véritable objectif est de calculer d'abord le MIP sur les coefficients du plus bas niveau de décomposition lorsque la taille des données est réduite, avant d'appliquer l'opérateur de synthèse pour reconstruire la projection à un niveau plus élevé, plus fin.

Selon l'équation ( 2-5 ), l'opérateur de synthèse est composé d'un sur-échantillonnage suivi d'une dilatation. La projection d'un signal  $f$  auquel on applique l'opérateur de synthèse s'écrit alors :

$$P_z \psi_A^\downarrow(f) = P_z \delta_A \sigma^\downarrow(f)$$

$\delta_A$  est la dilatation avec l'élément structurant A et  $\sigma^\downarrow$  est le sur-échantillonnage d'un facteur deux dans chaque dimension de l'espace. Par conséquent, le problème revient à déplacer l'opérateur  $P_z$  vers la droite. Le problème se décompose ainsi en deux parties. Dans un premier temps, on considère la projection d'une fonction dilatée, puis la projection d'une fonction sur-échantillonnée. Etant donné que  $P_z$  et  $\delta_A$  impliquent tous deux le calcul d'un maximum, il est évident de voir que le calcul d'une projection axiale de  $f$  suivi d'une dilatation revient à calculer  $P_z \delta_A(f)$ .

$$P_z \delta_A(f) = \delta_A P_z(f) \quad (2-11)$$

$\delta_A$  est une dilatation tridimensionnelle, et  $\delta_A$  une dilatation bidimensionnelle.

Sur-échantillonner consiste à insérer des zéros entre les voxels voisins dans chaque dimension de l'espace. Si la fonction sur-échantillonnée est projetée, les valeurs projetées de la fonction originale ne seront pas affectées par les zéros insérés car ils ne contribuent pas au maximum. Pour les valeurs ne faisant pas partie de la fonction originale, la projection revient à trouver le maximum sur une succession de zéros. Par

conséquent cela revient à effectuer un sur-échantillonnage sur la projection de la fonction originale.

$$P_z \sigma^\downarrow(f) = \sigma^\downarrow P_z(f) \quad (2-12)$$

$\sigma^\downarrow$  de la partie droite de l'équation ( 2-12 ) est un opérateur de sur-échantillonnage 2D. Il suffit de combiner l'équation ( 2-11 ) et l'équation ( 2-12 ) pour avoir le déplacement vers la droite de l'opérateur de projection par rapport à l'opérateur de synthèse.

$$P_z \psi_A^\downarrow(f) = P_z \delta_A \sigma^\downarrow(f) = \delta_{\tilde{A}} P_z \sigma^\downarrow(f) = \delta_{\tilde{A}} \sigma^\downarrow P_z(f) = \psi_{\tilde{A}}^\downarrow P_z(f) \quad (2-13)$$

$\psi_{\tilde{A}}^\downarrow$  est l'opérateur de synthèse 2D. Il est de la même forme que  $\psi_A^\downarrow$  excepté que son élément structurant  $A$  a été remplacé par  $\tilde{A}$ . Il est alors facile de généraliser ( 2-13 ) au cas de la forme itérative de l'opérateur de synthèse  $\psi_A^{\downarrow k}, k > 1$ . Une forme multi-résolution de l'algorithme MIP pour le cas des projections axiales est ainsi démontrée.

$$P_z(f) = \psi_{\tilde{A}}^{\downarrow L}(P_z(f_L)) \vee \bigvee_{k=0}^{L-1} \psi_{\tilde{A}}^{\downarrow k}(P_z(d_k)) \quad (2-14)$$

### 2.2.2.3 Schéma de reconstruction progressive de la projection MIP

La formule ( 2-14 ) permet la reconstruction progressive à partir du signal de plus basse résolution  $f_L$ , et en utilisant successivement  $d_k, k = L-1, \dots, 0$ .  $\hat{P}_z^{(L)}(f)$  est l'approximation de la projection au L-ième niveau définie par :

$$\hat{P}_z^{(L)}(f) = \psi_{\tilde{A}}^{\downarrow L}(P_z(f_L)) \quad (2-15)$$

$\hat{P}_z^{(j)}(f)$  est l'approximation de la projection au j-ième niveau,  $j = L-1, \dots, 0$  définie par :

$$\hat{P}_z^{(j)}(f) = \psi_A^{\downarrow L}(P_z(f_L)) \vee \bigvee_{k=j}^{L-1} \psi_A^{\downarrow k}(P_z(d_k)) \quad (2-16)$$

À partir de  $\hat{P}_z^{(L)}(f)$  exprimé en ( 2-15 ),  $\hat{P}_z^{(j)}(f)$  exprimé en ( 2-16 ), peut être calculé récursivement jusqu'à la projection MIP exacte de la fonction originale  $\hat{P}_z^{(0)}(f)$  :

$$\hat{P}_z^{(j-1)}(f) = \psi_A^{\downarrow j-1}(P_z(d_{j-1})) \vee \hat{P}_z^{(j)}(f) \quad (2-17)$$

$$\hat{P}_z^{(0)}(f) = P_z(f)$$

### 2.3 Discussion sur les différentes méthodes

L'aspect intéressant de l'algorithme de Roerdink est l'obtention d'une forme progressive du MIP, en utilisant une représentation de données pyramidale. Toutefois, la vitesse et l'efficacité de l'algorithme résultant ne lui permettent pas d'être concurrentiel avec ceux proposés dans la littérature. Une critique est d'abord faite sur l'algorithme de Roerdink. Suite à une synthèse globale des algorithmes proposés dans la littérature, nous proposerons notre nouvelle approche.

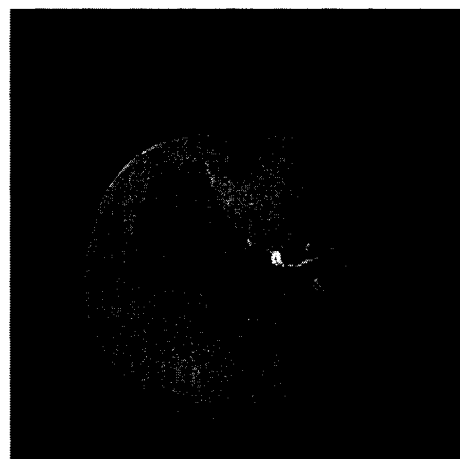
#### 2.3.1 Critique de l'algorithme de Roerdink

La représentation pyramidale utilisée par Roerdink apporte en général des avantages. D'une part, le dernier élément de la pyramide - c.à.d. le dernier objet issu de la décomposition - donne une bonne représentation globale de l'objet final avec un nombre de données réduit.

D'autre part, les autres éléments de la pyramide sont composés de nombreuses valeurs nulles ou souvent négligeables. Ils permettent de raffiner à une résolution supérieure la représentation globale obtenue avec l'élément situé au sommet de la pyramide. Les informations données par les détails de chaque étage de la pyramide s'ajoutent à la représentation obtenue aux étages supérieurs. Ce sont ces mêmes avantages qui sont recherchés avec l'utilisation des ondelettes. Cependant, l'utilisation de la représentation pyramidale dans l'algorithme de Roerdink n'accède pas à ces avantages.

#### **2.3.1.1 Mauvaise représentation**

Premièrement, l'image de la projection MIP du dernier volume issue de la décomposition n'est pas représentative de la projection MIP de l'image finale. En effet, étant donné que l'opérateur d'analyse est une érosion, il ne sélectionne que les coefficients de valeur minimum pour le niveau supérieur de la pyramide. Ce ne sont donc pas les coefficients qui sont retenus par le MIP lorsqu'il est appliqué à l'image originale. Pour illustrer ce défaut, l'algorithme a été testé sur l'image volumique « head », de taille  $256 \times 256 \times 112$ . Comme nous pouvons le voir sur la figure 6, après un seul niveau de décomposition, les vaisseaux sanguins ont pratiquement disparu sur l'image du MIP du dernier volume de la pyramide. Ils ont complètement disparu après deux niveaux de décomposition comme le montre la figure 7. La figure 6 et 7 se réfèrent aux équations de décomposition pyramidale décrites en ( 2-2 ) et de reconstruction décrites par ( 2-17 ).

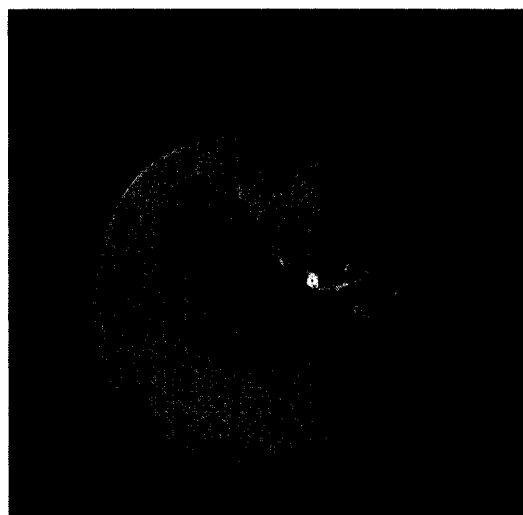


Projection MIP du volume de détails



Projection MIP du  
volume d'approximation

Figure 6 Projection MIP des différents volumes issus d'une décomposition pyramidale faite sur un seul niveau



Projection MIP du premier volume de détails



Projection MIP du  
premier volume de  
détails



Projection MIP du  
volume  
d'approximation

Figure 7 Projection MIP des différents volumes issus d'une décomposition pyramidale faite sur deux niveaux

Lorsque l'on compare l'image de projection MIP du volume original de la figure 8 avec celles des volumes issus la décomposition, on se rend compte qu'elle correspond à celle obtenue à partir du premier volume de détails  $d_0$ .



Figure 8 Projection MIP du volume original

Toute l'information pertinente dans le cadre d'un rendu MIP se retrouve dans le premier volume de détails. Bien que les autres éléments de la pyramide représentent le volume dans un espace réduit, ils ne constituent que de l'information supplémentaire peu exploitable.

#### **2.3.1.2 Grosse consommation de mémoire**

Deuxièmement, la représentation pyramidale proposée est beaucoup plus consommatrice mémoire que la représentation classique. L'opérateur de soustraction utilisé ne permet pas d'avoir des coefficients de détails de petites valeurs. Cette représentation ne permet pas de compression.



### 2.3.1.3 Direction de travail proposé par l'auteur

L'auteur de l'article propose des directions de recherche comme suite à son travail. Il développe l'utilisation d'un opérateur d'ouverture comme opérateur d'analyse dans un deuxième article [33]. Cela correspond aux pyramides de Sun-Maragos. Ainsi, moins de détails sont enlevés entre chaque niveau de décomposition. Mais, ceci implique que la pyramide de décomposition n'est plus une pyramide d'adjonction. Le produit de l'opérateur de synthèse par l'opérateur d'analyse  $\psi_A^\downarrow \psi_A^\uparrow$  n'est plus une ouverture. Pour un signal  $f$ ,  $\psi_A^\downarrow \psi_A^\uparrow(f)$  n'est plus toujours inférieur à  $f$ . Cela oblige à utiliser les opérateurs arithmétiques classiques d'addition et de soustraction qui ne commutent plus avec l'opérateur MIP. La formule ( 2-8 ) n'est plus valide. Par conséquent, pour pouvoir construire l'image MIP à pleine résolution, il faudrait reconstruire la pyramide au complet, puis ré-appliquer l'opérateur MIP. Ceci prendrait non seulement un temps considérable, mais n'apporterait aucun avantage de performance.

D'autre part, l'auteur propose l'utilisation des ondelettes morphologiques [28]. Elles ont l'avantage d'offrir une représentation multi-résolution non redondante et permettent aussi des économies de mémoire.

### 2.3.2 Nouvelle approche envisagée

Suite à notre analyse, il semble qu'aucune représentation de données convaincante permettant la projection MIP progressive n'a encore été développée.

L'algorithme le plus efficace reste celui de Lukas Morz. Celui-ci possède certains des avantages que l'on recherche par l'utilisation des ondelettes, ou des pyramides de décomposition. Il compresse les données par un pré-traitement laborieux. Il traite de manière progressive les voxels suivant leurs valeurs d'intensité. Comme le prétraitement consiste à une élimination des voxels selon une comparaison récursive du voisinage, son efficacité dépend du volume considéré. Si le volume est très large avec une structure

granulée et des contrastes de niveaux de gris peu marqués, l'efficacité sera diminuée certainement.

L'objectif de ce travail est de proposer une représentation de données basée sur un modèle théorique solide, comme l'a fait Roerdink avec les pyramides morphologiques, mais qui permettent une efficacité de traitement comparable avec l'algorithme de Lukas Morz.

Cependant, il est difficile d'améliorer directement la proposition de Roerdink. Pour garder la propriété de reconstruction progressive, il est important de garder un opérateur de synthèse qui commute avec le maximum. Or il est difficile de trouver des opérateurs morphologiques qui commutent avec le maximum à autres que la dilatation. Il est aussi difficile de trouver un opérateur d'analyse qui donne une meilleure approximation de l'image finale, tout en gardant les propriétés de pyramides d'adjonction. Aussi, les opérateurs arithmétiques d'addition et de soustraction, qui permettent de bonnes compressions de données, ne sont pas commutatifs avec l'opérateur MIP.

En nous basant sur un schéma de décomposition en ondelette présenté dans le chapitre suivant, nous allons proposer une nouvelle représentation de données. Nous nous assurerons qu'elle permette un calcul progressif du MIP tout en apportant des avantages de performance.

## **CHAPITRE 3**

### **SCHÉMAS DE DÉCOMPOSITIONS NON LINÉAIRES**

Les ondelettes non linéaires commencent à être reconnues comme extensions possibles aux ondelettes linéaires. En effet, quelques auteurs [16-28] ont considéré des transformations en ondelettes non linéaires comme cas particulier de la décomposition en ondelettes. H. J. A. M. Heijman et J. Goutsias [27] présentent un schéma général de décomposition en ondelettes qui englobe à la fois le schéma classique de décomposition linéaire et un schéma non linéaire. Leur théorie repose sur deux conditions. Ces conditions sont nécessaires afin d'avoir un schéma multi résolution qui ne soit pas redondant et qui garantisse la reconstruction parfaite.

Dans une première partie, le schéma général de décomposition en ondelette de J. Goutsias et H. J. A. M. Heijman est présenté. Nous étudions, enfin, le lifting d'ondelette introduit par W. Sweldens ([42-45]) qui entre dans le schéma général décrit précédemment et permet d'améliorer les propriétés des ondelettes.

#### **3.1 Le schéma général de Heijmans et Goutsias**

Dans le schéma introduit par Goutsias et Heijmans, les espaces de multi-résolutions (ou les espaces d'approximation) et les espaces de détails sont des ensembles quelconques. Des opérateurs permettent de monter (analyse) ou de descendre (synthèse) d'une échelle à l'autre sans perdre d'information. Dans un premier article [27], Goutsias et Heijmans énoncent les deux conditions sur lesquels repose leur schéma qu'ils développent ensuite dans un second article [28]. La première est la condition de reconstruction parfaite qui garantit la représentation complète du signal par la décomposition. La seconde est la condition de non redondance. Cela est pris dans le sens où la répétition successive des opérateurs d'analyse et de synthèse ne modifie pas la décomposition du signal.

Dans un premier temps, le schéma général de décomposition en ondelette couplée est présenté. Le schéma de décomposition en ondelette découplée, cas particulier du schéma couplé, est introduit ensuite. La décomposition linéaire en ondelette classique est un cas particulier de la décomposition en ondelette découplée.

### 3.1.1 Schéma de décomposition couplée en ondelettes

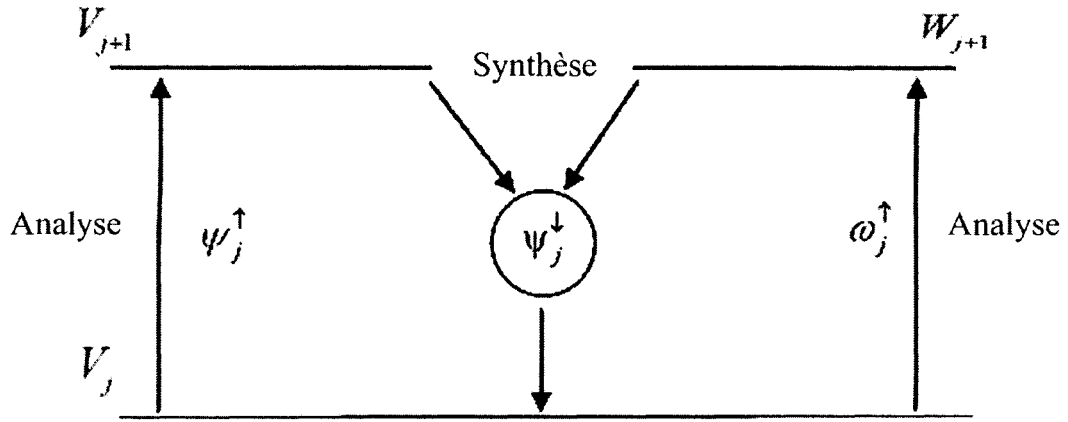


Figure 9 Transformation couplée en ondelettes

Soit  $V_j$  l'espace du signal (ou l'espace des coefficients d'approximation) au niveau  $j$  et  $W_j$  l'espace des détails (ou l'espace des coefficients de détail) au niveau  $j$ .

L'analyse du signal consiste à décomposer le signal à un niveau  $j+1$  avec l'opérateur d'analyse du signal  $\psi_j^\uparrow : V_j \rightarrow V_{j+1}$  et l'opérateur d'analyse de détail  $\omega_j^\uparrow : V_j \rightarrow W_{j+1}$ . La synthèse du signal consiste à reconstruire le signal à un niveau  $j$  inférieur, avec l'opérateur de synthèse  $\psi_j^\downarrow : V_{j+1} \times W_{j+1} \rightarrow V_j$ . Le schéma de la transformation résultante est présenté à la figure 9.

### 3.1.1.1 Condition de parfaite reconstruction

La condition que la décomposition ainsi décrite assure une représentation complète du signal dans le sens que l'application  $(\psi_j^\uparrow, \omega_j^\uparrow): V_j \rightarrow V_{j+1} \times W_{j+1}$  soit l'inverse de  $\psi_j^\downarrow: V_{j+1} \times W_{j+1} \rightarrow V_j$ , est décrite par l'équation suivante :

$$\psi_j^\downarrow(\psi_j^\uparrow(x), \omega_j^\uparrow(x)) = x, \text{ si } x \in V_j \quad (3-1)$$

C'est la condition de parfaite reconstruction. Cette condition implique que l'application  $(\psi_j^\uparrow, \omega_j^\uparrow): V_j \rightarrow V_{j+1} \times W_{j+1}$  est injective et que l'application  $\psi_j^\downarrow: V_{j+1} \times W_{j+1} \rightarrow V_j$  est surjective.

### 3.1.1.2 Condition de non redondance

$$\begin{cases} \psi_j^\uparrow(\psi_j^\downarrow(x, y)) = x, \text{ si } x \in V_{j+1}, y \in W_{j+1} \\ \omega_j^\uparrow(\psi_j^\downarrow(x, y)) = y, \text{ si } x \in V_{j+1}, y \in W_{j+1} \end{cases} \quad (3-2)$$

Les deux conditions décrites par ( 3-2 ) garantissent une décomposition non redondante. Elles impliquent que  $(\psi_j^\uparrow, \omega_j^\uparrow): V_j \rightarrow V_{j+1} \times W_{j+1}$  est surjective, et que  $\psi_j^\downarrow: V_{j+1} \times W_{j+1} \rightarrow V_j$  est injective.

Ainsi, pour un signal donné  $x_0 \in V_0$ , nous avons le schéma d'analyse récursive suivant :

$$\begin{aligned} x_0 &\rightarrow \{x_1, y_1\} \rightarrow \{x_2, y_2, y_1\} \rightarrow \dots \\ &\rightarrow \{x_k, y_k, y_{k-1}, \dots, y_1\} \rightarrow \dots \end{aligned}$$

avec  $x_{j+1} = \psi_j^\uparrow(x_j) \in V_{j+1}$  et  $y_{j+1} = \omega_j^\uparrow(x_j) \in W_{j+1}$ ,  $j \geq 0$ . Le schéma de la figure 10 illustre ce processus de décomposition.

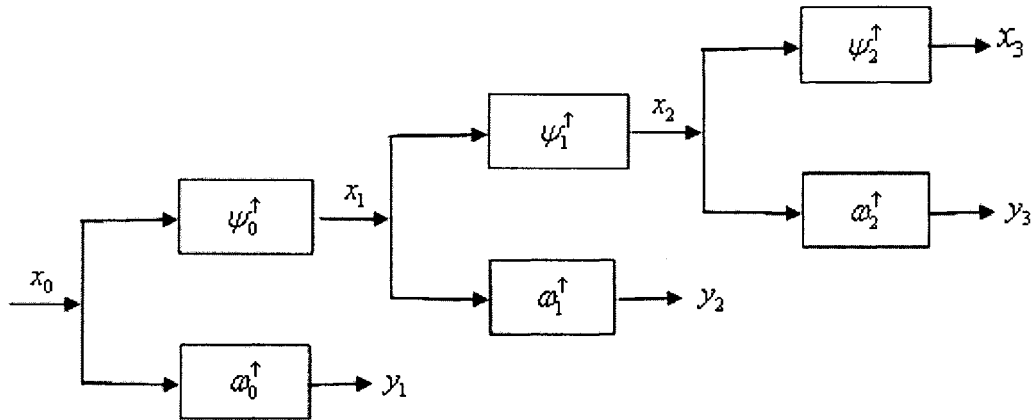


Figure 10 Décomposition en ondelettes sur 3 niveaux

Le signal  $x_0$  peut être exactement reconstruit à partir de  $x_k$  et de  $y_k, y_{k-1}, \dots, y_1$  par le schéma de synthèse récursif suivant :

$$x_j = \psi_j^\downarrow(x_{j+1}, y_{j+1}), \quad j = k-1, k-2, \dots, 0$$

Le schéma de la figure 11 illustre ce processus de reconstruction.

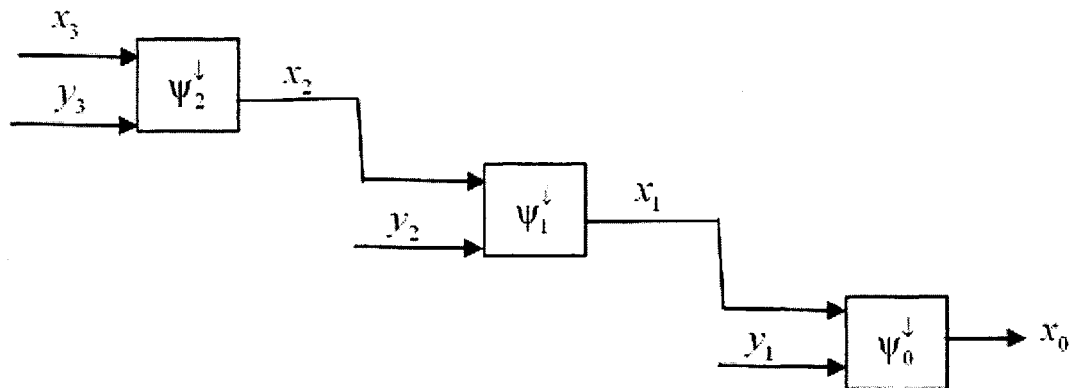


Figure 11 Reconstruction couplée en ondelettes sur 3 niveaux

### 3.1.2 Schéma de décomposition découplée en ondelettes

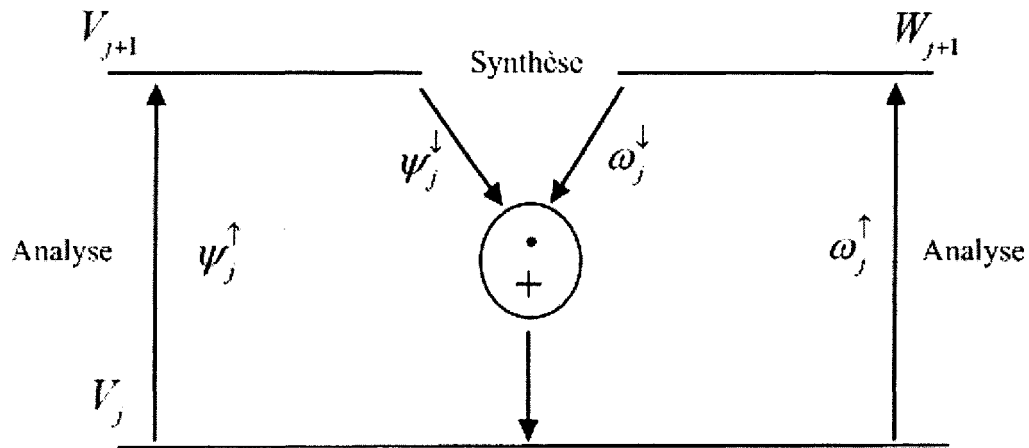


Figure 12 Transformation découplée en ondelettes

Un intérêt est porté au cas particulier où l'opérateur de synthèse du signal de la décomposition couplé  $\psi_j^\downarrow$  peut être décomposé comme la somme de deux opérateurs de synthèse  $\psi_j^\downarrow$  et  $\omega_j^\downarrow$  :

$$\psi_j^\downarrow(x, y) = \psi_j^\downarrow(x) \dot{+} \omega_j^\downarrow(y), \quad x \in V_{j+1}, y \in W_{j+1} \quad (3-3)$$

$\dot{+}$  est un opérateur d'addition  $\dot{+}$  sur  $V_j$  ( $\dot{+}$  peut dépendre de  $j$ ),  $\psi_j^\downarrow : V_{j+1} \rightarrow V_j$  est l'opérateur de synthèse du signal au niveau  $j$ ,  $\omega_j^\downarrow : W_{j+1} \rightarrow V_j$  est l'opérateur de synthèse des détails au niveau  $j$ . Cette transformation résultante, appelée transformation découplée en ondelette, est illustrée par le schéma de la figure 12.

Les conditions de reconstruction parfaite et de non redondance ( 3-1) et ( 3-2 ) deviennent alors :

$$\psi_j^\downarrow \psi_j^\uparrow(x) + \omega_j^\downarrow \omega_j^\uparrow(x) = x, \text{ si } x \in V_j \quad (3-4)$$

$$\psi_j^\uparrow(\psi_j^\downarrow(x) + \omega_j^\downarrow(y)) = x, \text{ si } x \in V_{j+1}, y \in W_{j+1} \quad (3-5)$$

$$\omega_j^\uparrow(\psi_j^\downarrow(x) + \omega_j^\downarrow(y)) = y, \text{ si } x \in V_{j+1}, y \in W_{j+1} \quad (3-6)$$

Ainsi, le signal  $x_0$  peut être exactement reconstruit à partir de  $x_k$  et de  $y_k, y_{k-1}, \dots, y_1$  par le schéma de synthèse récursif suivant :

$$x_j = \psi_j^\downarrow(x_{j+1}) + \omega_j^\downarrow(y_{j+1}), \quad j = k-1, k-2, \dots, 0$$

Le signal  $x_j$  du niveau  $j$  est reconstruit à partir des informations qui sont uniquement disponibles au niveau  $j+1$ . Dans un premier temps le signal  $x_{j+1}$  est transposé au niveau  $j$  par l'intermédiaire de l'opérateur de synthèse  $\psi_j^\downarrow$  afin d'obtenir une approximation  $\hat{x}_j = \psi_j^\downarrow(x_{j+1})$  de  $x_j$ . Puis, les détails sont transposés au niveau  $j$  par l'intermédiaire de l'opérateur de synthèse  $\omega_j^\downarrow$  afin d'obtenir les détails  $e_j = \omega_j^\downarrow(y_{j+1})$  du niveau  $j$ . Enfin, les résultats sont combinés avec l'opérateur  $+$ . Le schéma de la figure 13 illustre ce processus de reconstruction.



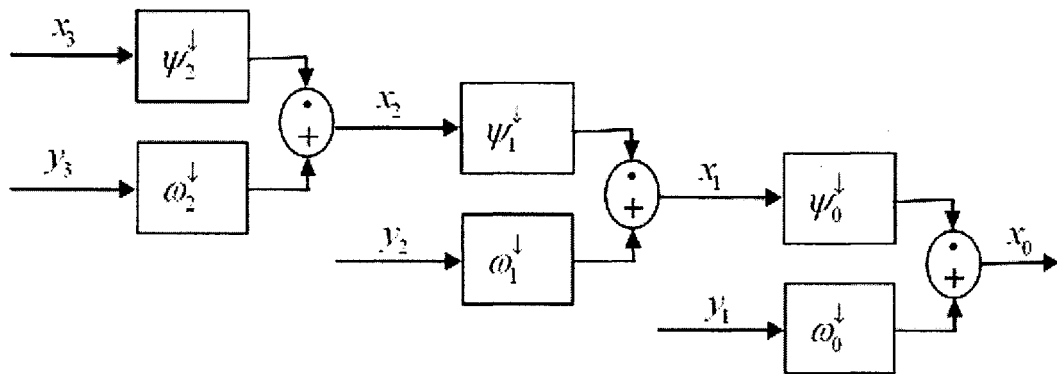


Figure 13 Reconstruction découplée en ondelettes sur 3 niveaux

### 3.1.3 Les ondelettes de Haar morphologiques [28]

La grande différence avec les ondelettes de Haar classiques est que le filtre linéaire d'analyse est remplacée par une érosion où une dilatation - c.à.d. l'opérateur minimum ou maximum entre deux échantillons. Les opérateurs et d'analyse et de synthèse sont définis comme suit :

$$\psi^\uparrow(x)(n) = x(2n) \wedge x(2n+1)$$

$$\omega^\uparrow(x)(n) = x(2n) - x(2n+1)$$

$$\psi^\downarrow(x)(2n) = \psi^\downarrow(x)(2n+1) = x(n)$$

$$\omega^\downarrow(y)(2n) = y(n) \vee 0, \omega^\downarrow(y)(2n+1) = -(y(n) \wedge 0)$$

Les ondelettes morphologiques de Haar sont un exemple de décomposition découplée en ondelettes. Le schéma de décomposition avec l'ondelette morphologique de Haar permet une meilleure préservation des contours qu'avec le schéma linéaire classique.

## 3.2 Le schéma lifting

Le lifting est une méthode d'implémentation de décomposition en ondelettes développée par Wim Sweldens ([42], [43]). Elle s'est révélée plus efficace que l'utilisation classique de bancs de filtres et est de plus en plus utilisée. C'est par exemple

le cas pour le JPEG2000. Elle a en effet l'avantage de pouvoir facilement obtenir des coefficients entiers et donc éviter les pertes de codage en point flottant. D'autre part Ingrid Daubechies et Wim Sweldens [44] ont montré que la complexité est réduite asymptotiquement par deux pour les longs filtres d'ondelettes.

Le principe consiste à modifier la structure usuelle des bancs de filtre pour pouvoir commencer par un sous échantillonnage afin de travailler directement sur des données deux fois moins nombreuses. Bien sûr pour pouvoir effectuer cela, les filtres passe-haut et passe-bas ne sont plus indépendants : ils doivent interagir. Pour effectuer le passage des deux filtres passe-haut et passe-bas à ces différents filtres appelés filtres de « lifting » et de « dual lifting », on utilise des propriétés mathématiques sur les polynômes de Laurent (polynômes avec des puissances négatives) et la complémentarité des bancs de filtres.

Cette nouvelle représentation offre de nouvelles possibilités dans la représentation par ondelettes. En effet, l'énorme flexibilité et la grande liberté qu'offre le schéma « lifting » ont permis aux chercheurs de développer des transformations en ondelettes non linéaires.

### **3.2.1 Extensions des schéma de décompositions en ondelettes**

Sweldens définit la transformation en ondelettes comme une construction de blocs qui peut facilement décorrélérer les données. Le lifting d'ondelettes, proposé par Sweldens permet la construction de bases d'ondelettes qui ne sont pas formées de translations et dilatations d'une même ondelette mère [45]. Ces nouvelles bases d'ondelettes sont générées à partir d'ondelettes classiques auxquelles certaines opérations (dites "de lifting") sont itérativement appliquées de façon à leur conférer les propriétés voulues. Le schéma n'exige pas que les opérateurs de lifting doivent être linéaires ou fixés. Il devient ainsi possible de construire n'importe quelle ondelette sur n'importe quelle grille d'échantillonnage.

### 3.2.2 Lifting d'ondelettes morphologiques

Dans le formalisme de Goutsias et Heijmans [28], les opérations de lifting reviennent à modifier les opérateurs d'analyse ou de synthèse du signal et du détail. Deux cas sont à distinguer:

- le lifting de prédiction modifie l'opérateur de synthèse du signal  $\psi^\downarrow$  et d'analyse du détail  $\omega^\uparrow$  définis au paragraphe 3.1.1.,
- le lifting de mise à jour modifie l'opérateur de synthèse du signal  $\psi^\downarrow$  et d'analyse du signal  $\psi^\uparrow$  définis au paragraphe 3.1.1.

Ces deux cas sont détaillés par la suite.

#### 3.2.2.1 Le lifting de prédiction

Le lifting de prédiction consiste à déterminer un opérateur de prédiction  $\pi$  et un opérateur de différence  $\dot{-}$  de telle sorte que

$$y'_j = y_j \dot{-} \pi(x_j)$$

$y'_j$  devient le nouveau détail, qui peut être vu comme la différence entre le vrai détail  $y_j$  et le détail prévu (ou estimé a priori) à partir du signal  $x_j$ . Les opérateurs de prédiction et de différence peuvent être choisis de façon à attribuer certaines propriétés particulières au nouveau détail  $y'_j$ . Par exemple, il est possible de choisir les différents opérateurs de façon à ce que  $y'_j$  soit un entier afin de pouvoir le stocker plus efficacement en mémoire. On obtient alors un opérateur d'analyse du détail  $\omega_p^\uparrow$  différent de l'opérateur original  $\omega^\uparrow$  défini au paragraphe 3.1.1 :

$$\omega_p^\uparrow(x) = \omega^\uparrow(x) \dot{-} \pi(\psi^\uparrow(x))$$

Par conséquent l'opérateur de synthèse  $\psi^\downarrow$ , définis au paragraphe 3.1.1, doit aussi être modifié :

$$\psi_p^\downarrow(x', y') = \psi^\downarrow(x', y' + \pi(x'))$$

Les opérateurs  $\dot{-}$  et  $\dot{+}$  doivent être inverses l'un de l'autre pour garantir la réversibilité de la transformation.

### 3.2.2.2 Le lifting de mise à jour

Le lifting de mise à jour consiste à déterminer un opérateur de mise à jour  $\lambda$  ainsi qu'une soustraction  $\dot{-}$  de telle sorte que :

$$x'_j = x_j \dot{-} \lambda(y_j)$$

$x'_j$  devient le nouveau signal, qui est la différence entre le vrai signal  $x_j$  et la prédiction  $\lambda(y_j)$ . Le lifting de mise à jour est en tout point analogue au lifting de prédiction, mise à part le fait que c'est l'approximation du signal qui est estimée à partir du détail. Le lifting peut ainsi améliorer une approximation déjà existante  $x_j$  afin de lui conférer certaines propriétés souhaitables, par exemple de conserver la moyenne, ou les maxima locaux. On obtient alors un nouvel opérateur d'analyse du signal  $\psi_u^\uparrow$  :

$$\psi_u^\uparrow(x) = \psi^\uparrow \dot{-} \lambda(\omega^\uparrow(x))$$

L'opérateur de synthèse doit donc aussi être modifié :

$$\psi_u^\downarrow(x', y') = \psi^\downarrow(x' + \lambda(\omega^\uparrow(y')), y')$$

De même, les opérateurs  $\dot{-}$  et  $\dot{+}$  doivent être inverses l'un de l'autre pour garantir la réversibilité de la transformation.

### 3.2.2.3 Lifting de prédiction et mise à jour

À partir d'une décomposition initiale, les détails sont modifiés selon le lifting de prédiction puis l'approximation du signal est modifiée selon le lifting de mise à jour en se basant sur les nouveaux détails. On obtient ainsi le lifting de prédiction et mise à jour :

$$\begin{aligned} y' &= \dot{y} - \pi(x) \\ x' &= \dot{x} - \lambda(y') \end{aligned}$$

On obtient ainsi de nouveaux opérateurs d'analyse  $\psi_{up}^{\uparrow}$  et  $\omega_{up}^{\uparrow}$  :

$$\omega_{up}^{\uparrow}(x) = \dot{\omega}^{\uparrow}(x) - \pi(\dot{\psi}^{\uparrow}(x)) \quad (3-7)$$

$$\psi_{up}^{\uparrow}(x) = \dot{\psi}^{\uparrow}(x) - \lambda(\dot{\omega}_{up}^{\uparrow}(x)) \quad (3-8)$$

Par conséquent l'opérateur de synthèse est aussi modifié :

$$\psi_{up}^{\downarrow}(x', y') = \dot{\psi}^{\downarrow}(x' + \lambda(y'), y' + \pi(x' + \lambda(y'))) \quad (3-9)$$

Ceci est présenté de façon schématisée à la figure 14.

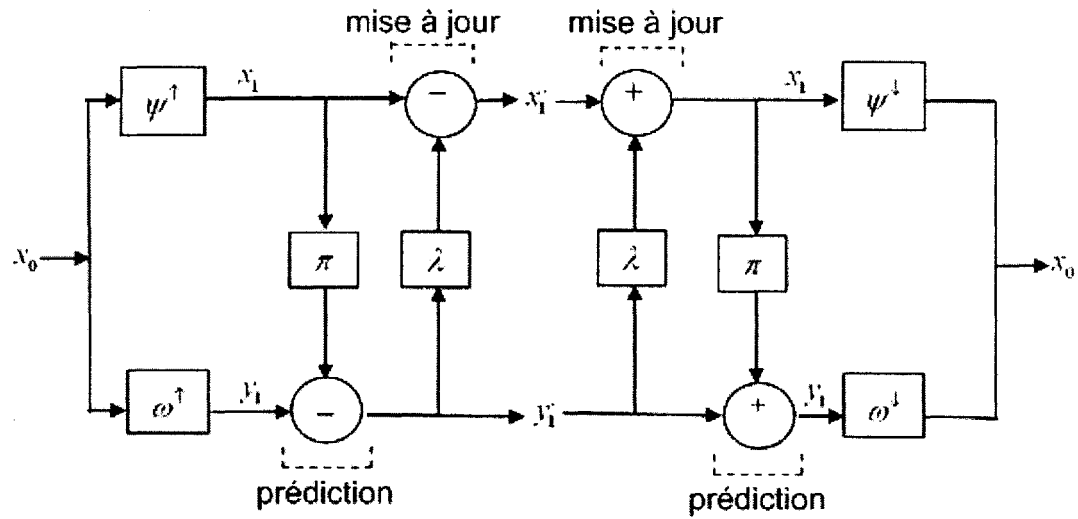


Figure 14 Lifting de prédiction et de mise à jour

### 3.2.2.4 Un exemple : Le Max lifting [28]

Nous présentons comme exemple le max lifting. La base d'ondelette paresseuse (la *lazy wavelet*) unidimensionnelle définie ainsi, est prise comme décomposition initiale. C'est un simple sous-échantillonnage :

$$\psi^\uparrow(x)(n) = x(2n)$$

$$\omega^\uparrow(x)(n) = x(2n+1)$$

La synthèse se fait ensuite ainsi :

$$\psi^\downarrow(x, y)(2n) = x(n)$$

$$\psi^\downarrow(x, y)(2n+1) = y(n)$$

Cette *lazy wavelet* fait l'analyse du signal en n'en prenant que les échantillons pairs. Les échantillons impairs constituent les détails. La synthèse du signal se fait en alternant les échantillons du signal du niveau supérieur avec les échantillons du détail. Cette décomposition triviale (en fait un sous-échantillonnage) n'est pas très intéressante d'un point de vue représentation optimum du signal. Les deux signaux résultants sont très

corrélés. Il est possible de l'améliorer en lui faisant un lifting de prédiction. Pour ceci, la fonction de prédiction du détail est définie ainsi :

$$\pi(x) = \max(x(2n), x(2n+2))$$

Ceci signifie que l'on estime, a priori le détail comme ayant la même valeur que le plus grand voisin. Les échantillons impairs sont, en première approximation, les mêmes que leur plus grand voisin (qui est pair). On obtient ainsi un nouveau détail  $y'$  qui est la différence entre le vrai détail  $x(2n+1)$  et le détail prédit  $x(2n)$ . On obtient alors, selon l'expression ( 3-7 ), l'analyse de détail suivante :

$$\omega_{up}^{\uparrow}(x)(n) = x(2n+1) - \max(x(2n), x(2n+2))$$

Ceci nous permet d'avoir de petits détails (si le signal est assez lisse) puisque le détail ne sera grand que lors des discontinuités. Il restera petit même lors des discontinuités en marches d'escalier. L'approximation du signal peut être améliorée en choisissant :

$$\lambda(y')(n) = -\max(0, y'(n-1), y'(n))$$

Le choix de cette fonction pour  $\lambda$  permet de conserver les maxima locaux dans le signal analysé (d'échelle supérieure). En effet,  $y'(n-1)$  et  $y'(n)$  ne seront supérieurs à 0 que s'ils correspondent à un maximum local. En ce cas  $x'(n)$  va augmenter sa valeur par rapport à  $x(n)$ . Selon l'expression ( 3-8 ), le nouvel opérateur d'analyse devient :

$$\psi_{up}^{\uparrow}(x)(n) = x(2n) + \max(0, \omega_{up}^{\uparrow}(x)(n-1), \omega_{up}^{\uparrow}(x)(n))$$

Cette décomposition est meilleure que la décomposition de la lazy wavelet. En effet, elle a la propriété d'avoir un petit détail et de conserver, dans l'analyse du signal, les maxima locaux, sans en ajouter de nouveaux. Cet exemple illustre bien comment on peut développer des décompositions en ondelettes ayant des propriétés particulières, en partant d'ondelettes triviales et en opérant des opérations de lifting judicieusement

choisies. Un exemple de max-lifting appliqué à une image en niveaux de gris est présenté sur la figure 15.

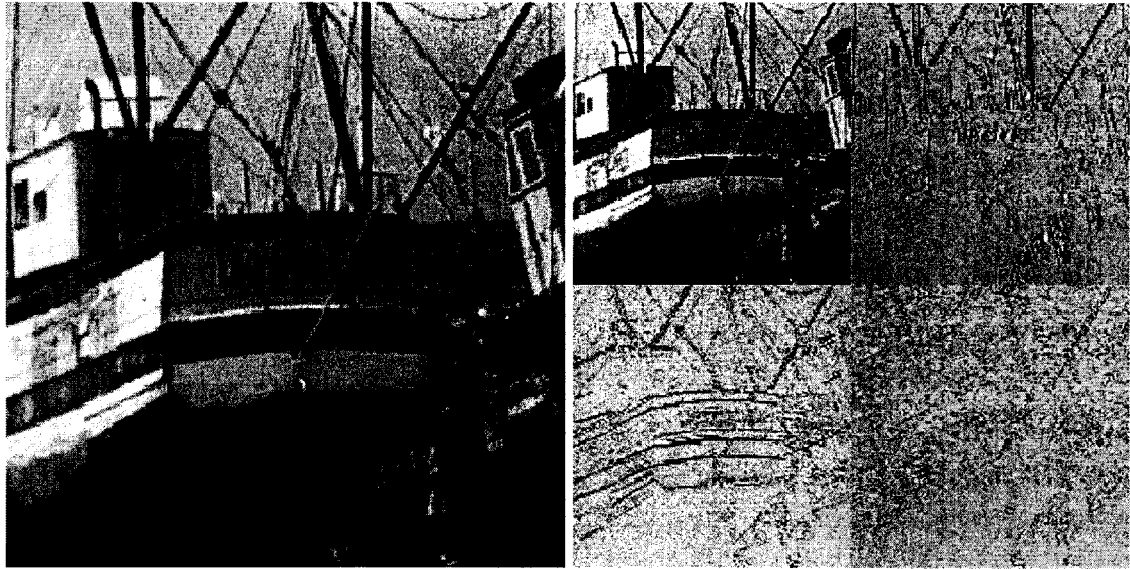


Figure 15 Décomposition par Max Lifting

Cet exemple a été obtenu en appliquant le Max lifting unidimensionnel successivement sur les lignes et les colonnes de l'image.



## CHAPITRE 4

### DÉCOMPOSITION PROPOSÉE

L'exemple précédent du Max lifting est intéressant au niveau qualité de représentation du volume d'approximation. En effet, si la projection MIP est appliquée sur le volume résultant d'une analyse par Max lifting, l'image résultante va être très représentative de l'image finale- c.a.d. MIP appliqué au volume original-, car les maximums ont été conservés tout au long de l'analyse.

Cependant, il est impossible de pouvoir reconstruire l'image finale avec la projection du volume d'approximation, et la projection des volumes de détails. En effet, nous ne pouvons pas reconstruire l'image de projection avec les maximums de différences obtenus par projection des volumes de détails. Il n'y a pas de lien direct avec le maximum de valeurs projeté.

Il n'est donc pas possible d'utiliser des coefficients de détails qui représentent une différence entre deux valeurs distinctes. L'utilisation des opérateurs arithmétiques usuels  $+$  et  $-$  ne convient donc pas pour le cas de la projection MIP progressive.

L'objectif est alors de trouver une décomposition qui garde les maximums locaux dans l'analyse du signal comme dans le Max lifting mais dont les coefficients de détails soient des valeurs comparables avec les coefficients résultant de l'analyse du signal. En effet, il faut pouvoir effectuer des calculs de maximum entre les coefficients résultants de la décomposition. La première idée est venue en suivant une intuition. Si, l'on veut garder les maximums et n'effectuer aucune opération arithmétique pour obtenir les coefficients de détails tout en gardant une décomposition non redondante, le moyen le plus simple consiste à garder les maximums locaux dans l'image d'analyse, et conserver la valeur non maximale localement dans les coefficients de détails.

#### 4.1 Schéma de décomposition proposé

On définit  $V_0$  comme étant l'espace de la séquence initiale de données :

$$V_0 = \cup x_i^0$$

$\cup$  est le symbole mathématique de l'union.  $V_j \rightarrow V_{j+1} \times W_{j+1} \times M_{j+1}$  est la décomposition de l'espace  $j$  à l'espace  $j+1$  de telle sorte que :

- $V_{j+1}$  est l'espace des maximums locaux du signal à une résolution inférieure. Il comprend la séquence composée des maximums locaux entre une valeur d'indice  $i$  paire et sa valeur suivante d'indice  $i+1$  impair dans la séquence  $V_j$ .

$$V_{j+1} = \{ \max(x_i^j, x_{i+1}^j), i \in 2\mathbb{Z} \}$$

$2\mathbb{Z}$  est l'ensemble des entiers relatifs pairs.

- $W_{j+1}$  est l'espace des minimums locaux du signal à une résolution inférieure. Il comprend la séquence composée des minimums locaux entre une valeur d'indice  $i$  paire et sa valeur suivante d'indice  $i+1$  impair dans la séquence  $V_j$ .

$$W_{j+1} = \{ \min(x_i^j, x_{i+1}^j), i \in 2\mathbb{Z} \}$$

$2\mathbb{Z}$  est l'ensemble des entiers relatifs pairs.

- $M_{j+1}$  est l'espace des marques qui comprend une séquence de valeur binaire. La valeur est égale à 1 à l'indice  $i$  si l'élément du même indice de la séquence  $V_{j+1}$  provient de la séquence composée des indices impairs de  $V_j$  :

$$M_{j+1} = \{ \chi_{V_{j+1}}(x_i^j), i \in 2\mathbb{Z} + 1, \}$$

$\chi$  est la fonction indicatrice qui transforme une relation d'ensemble en une séquence de donnée binaire. Elle est définie de la façon suivante :

Soit deux ensembles A et B avec  $A \subset B$ ,  $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$  tel que  $x \in B$

Il est ainsi possible de définir les opérateurs d'analyse et de synthèse en suivant le schéma de décomposition en ondelette généralisé présenté dans le chapitre précédent. Dans un premier temps, nous nous baserons sur le schéma le plus général de la décomposition couplée en ondelette (paragraphe 3.1), puis nous l'étendrons au cas particulier de la décomposition découplée en ondelette (paragraphe 3.2).

#### 4.1.1 Formalisme de décomposition couplée en ondelette

En suivant le formalisme de l'ondelette couplée du paragraphe 3.1, il est possible de définir les opérateurs d'analyse  $\psi_j^\uparrow$  et  $\omega_j^\uparrow$ , et l'opérateur de synthèse  $\psi_j^\downarrow$ .

$$\psi_j^\uparrow : V_{j-1} \rightarrow V_j \times M_j \quad (4-1)$$

$$\psi_j^\uparrow : \begin{cases} x_j(n) = \max(x_{j-1}(2n), x_{j-1}(2n+1)) & x_j \in V_j, x_{j-1} \in V_{j-1} \\ m_j(n) = 1 \text{ si } x_j(n) \neq x_{j-1}(2n) \text{ sinon } m_j(n) = 0, & m_j \in M_j \end{cases}$$

$$\omega_j^\uparrow : V_{j-1} \rightarrow W_j \times M_j \quad (4-2)$$

$$\omega_j^\uparrow : \begin{cases} y_j(n) = \min(x_{j-1}(2n), x_{j-1}(2n+1)), & y_j \in W_j, x_{j-1} \in V_{j-1} \\ m_j(n) = 1 \text{ si } y_j(n) \neq x_{j-1}(2n+1) \text{ sinon } m_j(n) = 0, & m_j \in M_j \end{cases}$$

La différence avec le schéma de décomposition couplé en ondelette présenté au paragraphe 3.1 vient de la présence supplémentaire des éléments  $m_j \in M_j$ .

Les valeurs  $m_j$  qui résultent de l'opérateur d'analyse  $\psi_j^\uparrow$  sont les mêmes valeurs  $m_j$  qui résultent de l'opérateur d'analyse  $\omega_j^\uparrow$ . Ainsi le schéma de décomposition présenté à

la figure 16 reprend celui de la figure 10 du paragraphe 3.1.1 en y ajoutant les composantes  $m_j$ .

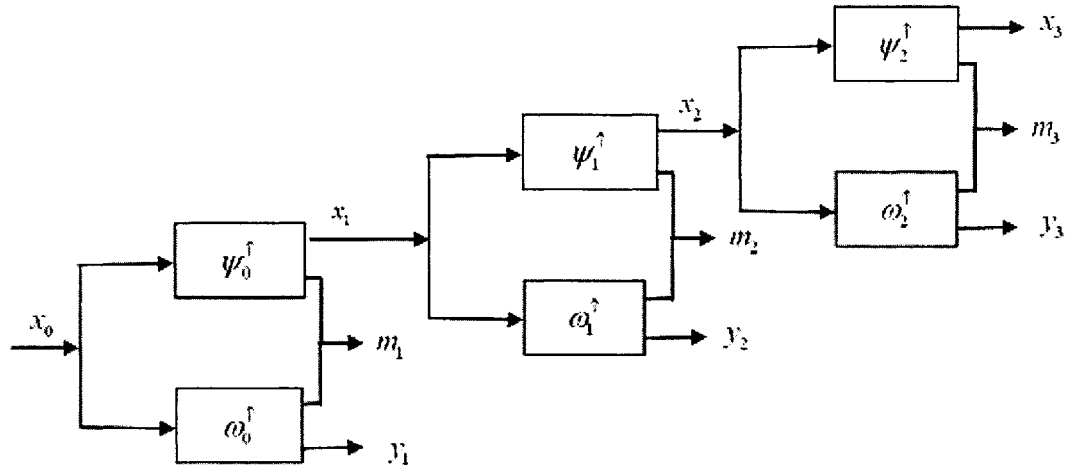


Figure 16 Schéma de décomposition en ondelette couplée de la transformation proposée

De même, la définition de l'opérateur de synthèse reprend celle utilisée pour le formalisme de la décomposition couplée en ondelette du paragraphe 3.1.1 en intégrant les éléments  $m_j$ . La figure 17 illustre ainsi le processus de reconstruction.

$$\Psi_j^\downarrow : V_{j+1} \times W_{j+1} \times M_{j+1} \rightarrow V_j$$

$$\Psi_j^\downarrow(x_{j+1}, y_{j+1}, m_{j+1}) : \begin{cases} x_j(2n) = y_{j+1}(n) \text{ si } m_{j+1}(n) = 1 \text{ sinon } x_j(2n) = x_{j+1}(n), \\ x_j(2n+1) = x_{j+1}(n) \text{ si } m_{j+1}(n) = 1 \text{ sinon } x_j(2n+1) = y_{j+1}(n) \end{cases}$$

$$\text{avec } x_j \in V_j, x_{j+1} \in V_{j+1}, y_{j+1} \in W_{j+1}, m_{j+1} \in M_{j+1}$$

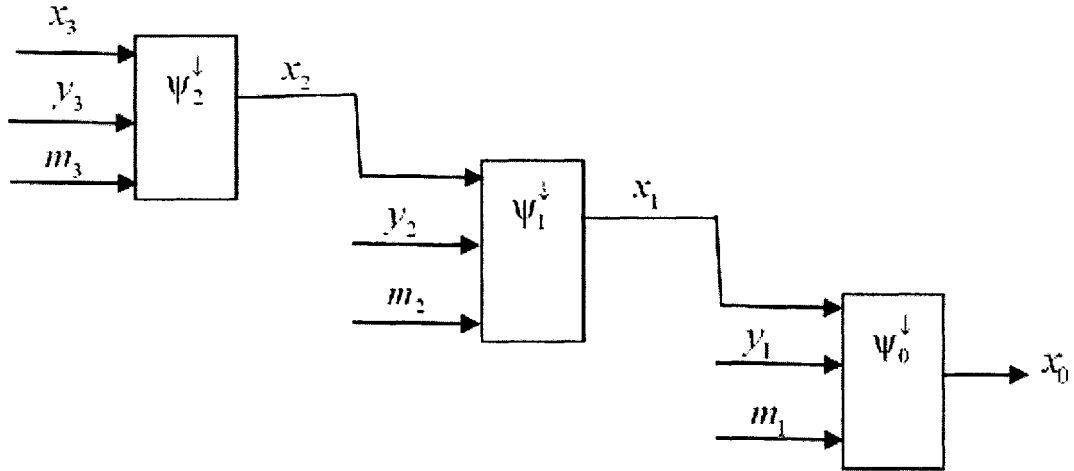


Figure 17 Schéma de reconstruction en ondelettes couplées de la décomposition proposée

#### 4.1.1.1 Vérification de la condition de parfaite reconstruction

Les éléments  $m_j$  sont nécessaires pour obtenir la condition de parfaite reconstruction. En effet, ce sont eux qui permettent de réordonner les paires d'élément de  $V_j$  d'indices  $i$  et  $i+1$  obtenues à partir des éléments de  $V_{j+1}$  et des éléments  $W_{j+1}$  d'indice  $i$ . Ainsi, en reprenant les opérateurs d'analyse et de synthèse définis précédemment, il est évident que la condition de parfaite reconstruction est vérifiée :

$$\psi_j^\downarrow(\psi_j^\uparrow(x), \omega_j^\uparrow(x)) = x, \text{ si } x \in V_j \quad (4-3)$$

$$(4-3) \Leftrightarrow \psi_j^\downarrow(x_{j+1}, y_{j+1}, m_{j+1}) = x$$

#### 4.1.1.2 Vérification de la condition de non-redondance

Le principe de la décomposition proposée consiste à séparer les données deux à deux et les classer selon une relation d'ordre. Ce principe assure l'unicité de la décomposition. Il ne peut y avoir de redondance entre les espaces  $V_{j+1}$  et  $W_{j+1}$ .

De même cette condition se vérifie facilement en reprenant les opérateurs d'analyse et de synthèse définis précédemment :

$$\begin{cases} \psi_j^\uparrow(\psi_j^\downarrow(x, y, m)) = (x, m), \text{ si } x \in V_{j+1}, y \in W_{j+1}, m \in M_{j+1} \\ \omega_j^\uparrow(\psi_j^\downarrow(x, y, m)) = (y, m), \text{ si } x \in V_{j+1}, y \in W_{j+1}, m \in M_{j+1} \end{cases} \quad (4-4)$$

Ainsi, les conditions permettant de rentrer dans le schéma généralisé de la décomposition en ondelettes, définie par H. J. A. M. Heijman [28], sont vérifiées.

#### 4.1.2 Formalisme de décomposition découplée en ondelette

Il est possible d'étendre le schéma de décomposition proposé au formalisme de décomposition découplée en ondelette. En effet, l'opérateur de synthèse du signal de la décomposition couplé  $\psi_j^\downarrow$  définie au paragraphe précédent peut être décomposé comme la somme de deux opérateurs de synthèse  $\psi_j^\downarrow$  et  $\omega_j^\downarrow$ .

Ceci n'est possible que si l'opérateur de sommation  $\dot{+}$  est le maximum :

$$\psi_j^\downarrow(x, m) \dot{+} \omega_j^\downarrow(y, m) = \max(\psi_j^\downarrow(x, m), \omega_j^\downarrow(y, m))$$

Ainsi, les opérateurs de synthèse sont définis à partir de la définition utilisée pour le formalisme de la décomposition découplée en ondelette du paragraphe 3.1.2 en intégrant les éléments  $m_j$ . La figure 18 illustre le processus de reconstruction.

$$\psi_j^\downarrow : V_{j+1} \times M_{j+1} \rightarrow V_j : \quad (4-5)$$

$$\psi_j^\downarrow(x_{j+1}, m_{j+1}) : \begin{cases} x_j(2n) = 0 \text{ si } m_{j+1}(n) = 1 \text{ sinon } x_j(2n) = x_{j+1}(n) \\ x_j(2n+1) = x_{j+1}(n) \text{ si } m_{j+1}(n) = 1 \text{ sinon } x_j(2n+1) = 0 \end{cases}$$

avec  $x_j \in V_j$ ,  $x_{j+1} \in V_{j+1}$ ,  $m_{j+1} \in M_{j+1}$

$$\omega_j^\downarrow : W_{j+1} \times M_{j+1} \rightarrow W_j \quad (4-6)$$

$$\omega_j^\downarrow(y_{j+1}, m_{j+1}) : \begin{cases} x_j(2n) = y_{j+1} & \text{si } m_{j+1}(n) = 1 \text{ sinon } x_j(2n) = 0 \\ x_j(2n+1) = 0 & \text{si } m_{j+1}(n) = 1 \text{ sinon } x_j(2n+1) = y_{j+1} \end{cases}$$

avec  $x_j \in V_j$ ,  $y_{j+1} \in W_{j+1}$ ,  $m_{j+1} \in M_{j+1}$

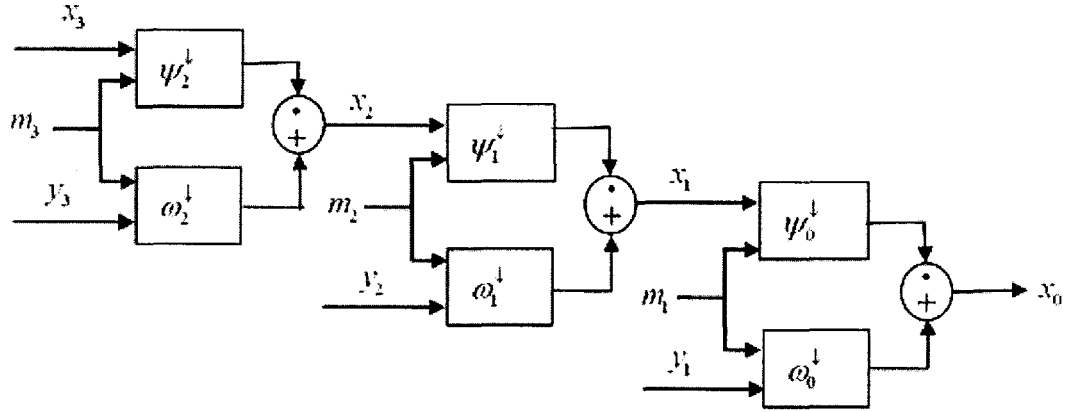


Figure 18 Schéma de reconstruction en ondelette découplées.

Pour les mêmes raisons expliquées pour le formalisme de décomposition couplé en ondelette dans le paragraphe précédent, les conditions de parfaite reconstruction et de non redondance sont vérifiées. Cependant, elles s'écrivent différemment. Ainsi la condition de parfaite reconstruction s'écrit de la façon suivante :

$$\psi_j^\downarrow \psi_j^\uparrow(x) + \omega_j^\downarrow \omega_j^\uparrow(x) = x, \text{ si } x \in V_j \quad (4-7)$$

$$\Leftrightarrow \psi_j^\downarrow(x_{j+1}, m_{j+1}) + \omega_j^\downarrow(y_{j+1}, m_{j+1}) = x,$$

$$x_{j+1} \in V_{j+1}, y_{j+1} \in W_{j+1}, m_{j+1} \in M_{j+1}$$

Elle est équivalente à l'expression ( 4-3 ), qui traduit la condition de parfaite reconstruction pour le cas de la décomposition couplée. De même la condition de non

redondance pour le cas de la décomposition découplée est équivalente à l'expression ( 4-4 ) et s'écrit :

$$\psi_j^\uparrow(\psi_j^\downarrow(x, m) + \dot{\omega}_j^\downarrow(y, m)) = (x, m), \text{ si } x \in V_{j+1}, y \in W_{j+1}, m \in M_{j+1} \quad (4-8)$$

$$\dot{\omega}_j^\uparrow(\psi_j^\downarrow(x, m) + \dot{\omega}_j^\downarrow(x, m)) = (y, m), \text{ si } x \in V_{j+1}, y \in W_{j+1}, m \in M_{j+1}$$

#### 4.1.3 Exemple numérique

Soit la séquence de données suivante :

$$1 - 5 - 4 - 2 - 24 - 39 - 28 - 84 - 78 - 30 - 8 - 5 - 2 - 78$$

L'opération d'analyse regroupe les minimums locaux et les maximums locaux en deux séquences distinctes, et marque les coefficients déplacés :

- La séquence initiale est splittée en deux autres séquences sous échantillonnées (la séquence d'approximation et la séquence de détail). Cela revient à appliquer *Lazy wavelet transform* introduite au chapitre 3.2.2.4 :

Approximation : 1 - 4 - 24 - 28 - 78 - 8 - 2 et Détail : 5 - 2 - 39 - 84 - 30 - 5 - 78

- Les maximums locaux sont regroupés dans la séquence d'approximation et les minimums locaux dans la séquence de détails. Les coefficients ainsi déplacés (représentés en gras) sont marqués. Les séquences de détail et d'approximation deviennent alors:

Approximation : 5 - 4 - **39** - **84** - 78 - 8 - **78** et Détail : 1 - 2 - **24** - **28** - 30 - 5 - 2

L'opération de synthèse, selon le formalisme de transformation couplée en ondelette, consiste à replacer les coefficients marqués afin de reconstruire directement la séquence initiale à partir des deux sous séquences d'approximations et de détails.



L'opération de synthèse, selon le formalisme de transformation découplée en ondelette, sépare le processus de reconstruction :

- Les séquences d'approximation et de détail sont sur échantillonné :

Approximation :      **5** - 0 - 4 - 0 - **39** - 0 - **84** - 0 - 78 - 0 - 8 - 0 - **78** - 0

Détail :                0 - **1** - 0 - 2 - 0 - **24** - 0 - **28** - 0 - 30 - 0 - 5 - 0 - **2**

- La première partie du processus de reconstruction correspond à l'application d'opérateurs de synthèses indépendamment sur les séquences d'approximation et de détail. Cela consiste à réorganiser les données dans les séquences selon leurs marques :

Approximation :      0 - 5 - 4 - 0 - 0 - 39 - 0 - 84 - 78 - 0 - 8 - 0 - 0 - 78

Détail :                1 - 0 - 0 - 2 - 24 - 0 - 28 - 0 - 0 - 30 - 0 - 5 - 2 - 0

- La première partie du processus de reconstruction correspond à l'application de l'opérateur maximum entre les séquences d'approximation et de détail.

#### 4.1.4 Application au cas tridimensionnel

Dans le cas d'un volume de données, la décomposition décrite dans les paragraphes précédents pour le cas d'un signal unidimensionnel est appliquée successivement dans les trois directions de l'espace. L'espace initial  $V_j$  est donc décomposé en huit sous-espaces,  $V_{j+1}$ ,  $W^x_{j+1}$ ,  $W^y_{j+1}$ ,  $W^z_{j+1}$ ,  $W^{x,y}_{j+1}$ ,  $W^{x,z}_{j+1}$ ,  $W^{y,z}_{j+1}$ ,  $W^{x,y,z}_{j+1}$  tel que :

$$V_j = V_{j+1} \oplus W^x_{j+1} \oplus W^y_{j+1} \oplus W^z_{j+1} \oplus W^{x,y}_{j+1} \oplus W^{x,z}_{j+1} \oplus W^{y,z}_{j+1} \oplus W^{x,y,z}_{j+1}$$

Les fonctions d'analyse et de synthèse se décomposent de la façon suivante :

$$\psi(x, y, z) = \psi(x)\psi(y)\psi(z)$$

$$\omega^x(x, y, z) = \omega(x)\psi(y)\psi(z)$$

$$\omega^y(x, y, z) = \psi(x)\omega(y)\psi(z)$$

$$\omega^z(x, y, z) = \psi(x)\psi(y)\omega(z)$$

$$\omega^{x,y}(x, y, z) = \omega(x)\omega(y)\psi(z)$$

$$\omega^{x,z}(x, y, z) = \omega(x)\psi(y)\omega(z)$$

$$\omega^{x,y,z}(x, y, z) = \omega(x)\omega(y)\omega(z)$$

## 4.2 Intérêt de la décomposition

### 4.2.1 Capacité de sélectivité

L'intérêt premier de cette décomposition est qu'elle effectue une sélection des données les plus pertinentes agissant dans la transformation de projection MIP, tout en gardant les caractéristiques spatiales. La capacité de compression n'intervient pas dans le fait que les coefficients de détails sont de valeur moindre. Elle intervient dans le fait que les données non contribuant à la transformation MIP sont rassemblées dans des sous-ensembles qu'il est possible d'éliminer. C'est une analyse spatio-morphologique comparée à l'analyse spatio-fréquentielle des transformations en ondelettes classiques. Cependant, il est nécessaire d'introduire la notion de marquage. Le marquage correspond à l'application d'un masque sur les données d'un sous-ensemble. Il consiste, en fait, à séparer ce sous-ensemble en deux autres partitions de ce sous-ensemble.

$$V_{j+1} = V_{j+1}^{\text{marqué}} \oplus V_{j+1}^{\text{non marqué}}.$$

Le stockage des marques nécessite un espace mémoire supplémentaire. Chaque marque est codée sur un seul bit. Pour une décomposition unidimensionnelle sur une séquence d'un nombre  $n$  de données,  $\frac{n}{2}$  marques sont nécessaires pour obtenir la condition de

parfaite reconstruction (paragraphe 4.1.1). Chaque décomposition unidimensionnelle est répétée dans les trois directions de l'espace pour un seul niveau de décomposition d'un volume. L'espace réservé aux marques en nombre de bits est donc de trois demis le nombre de données du volume pour chaque décomposition. Ceci peut être considéré comme négligeable si l'on considère le fait que les données sont codées sur minimum 8 bits. Cette augmentation d'espace mémoire est compensée par la capacité de compression qu'offre la décomposition.

## **4.2.2 Importance de contribution de chaque sous-volume**

### **4.2.2.1 Premier niveau de décomposition**

Lorsque la décomposition proposée est effectuée sur un seul niveau, dans chacune des trois dimensions de l'espace, le volume initial est alors décomposé en huit sous-volumes (voir figure 19). Le sous-volume le plus proche de l'origine (**1** sur la figure 19) correspond à celui qui regroupe les maximums locaux dans les trois directions de l'espace. Le sous-volume le plus éloigné de l'origine (**8** sur la figure 19) correspond à celui qui regroupe les minimums locaux dans les trois directions de l'espace. Les sous-volumes dont une des faces communique avec le sous-volume le plus proche de l'origine (**2, 3, et 5** sur la figure 19) correspondent à ceux qui regroupent les maximums locaux selon seulement deux sur trois des directions de l'espace. Enfin, les sous-volumes dont une des faces communique avec le sous-volume le plus éloigné de l'origine (**4, 6, et 7** sur la figure 19) correspondent à ceux qui regroupent les minimums locaux selon deux sur trois des directions de l'espace.

Nous pouvons donc classer ainsi nos sous-volumes selon leur importance de contribution sur l'image finale. Le sous-volume **1** se trouve en première position, suivi des sous-volumes **2, 3, 5**, puis des sous-volumes **4, 6, et 7** et enfin du sous-volume **8**.

Dans le cas de la première décomposition, le sous-volume **8** peut être éliminé. En effet, il ne contient que des valeurs correspondant à un minimum local dans un cube de deux pixels de chaque côté. Il y a une petite probabilité pour qu'un rayon qui passe par ce minimum local ne rencontre pas un de ses 7 voisins (autres pixels du cube de deux pixels de côté), et il y a une très infime probabilité que, dans ce cas, ce voxel ait la valeur maximum des voxels rencontrés par ce rayon. L'information perdue est alors d'importance négligeable.

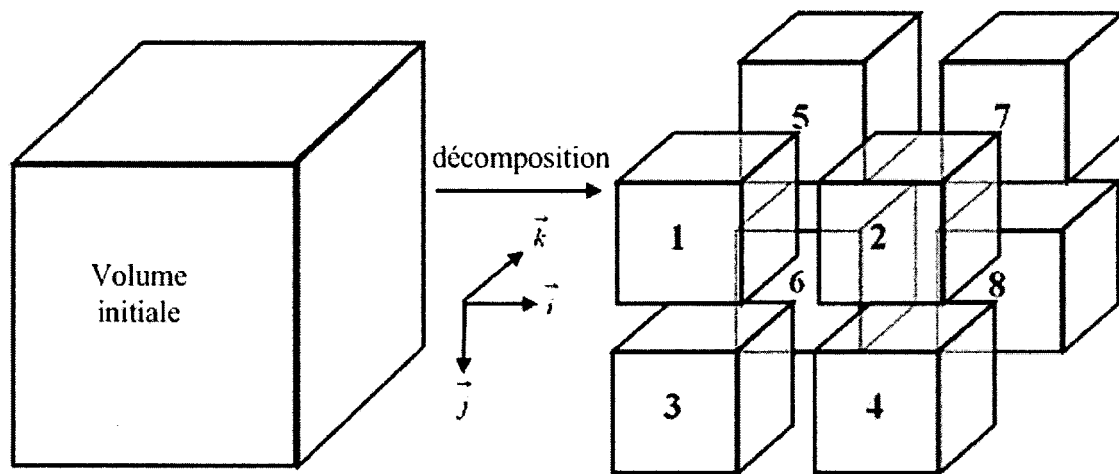


Figure 19 Schéma de décomposition (un niveau de décomposition) d'un volume en 8 sous-volumes. Le sous-volume 1 contient les maximums locaux.

#### 4.2.2.2 Plusieurs niveaux de décomposition

Chaque sous-volume comprend un grand nombre de valeurs non négligeables. Chacun possède aussi un grand nombre de voxels non contribuant. Il est intéressant de pouvoir décomposer à nouveau afin de pouvoir séparer les valeurs non contribuant et ainsi réduire le nombre de données.

Le paragraphe précédent donne un ordre d'importance pour chaque sous-volume selon leur contribution à l'image de rendu MIP finale. De même, ce classement peut être effectué pour chaque sous-volume issu d'un niveau supérieur de décomposition. Nous

pouvons ainsi attribuer un taux d'importance à chaque sous-bloc. La figure 20 illustre la décomposition d'un volume, sur deux niveaux, en 64 sous-volumes.

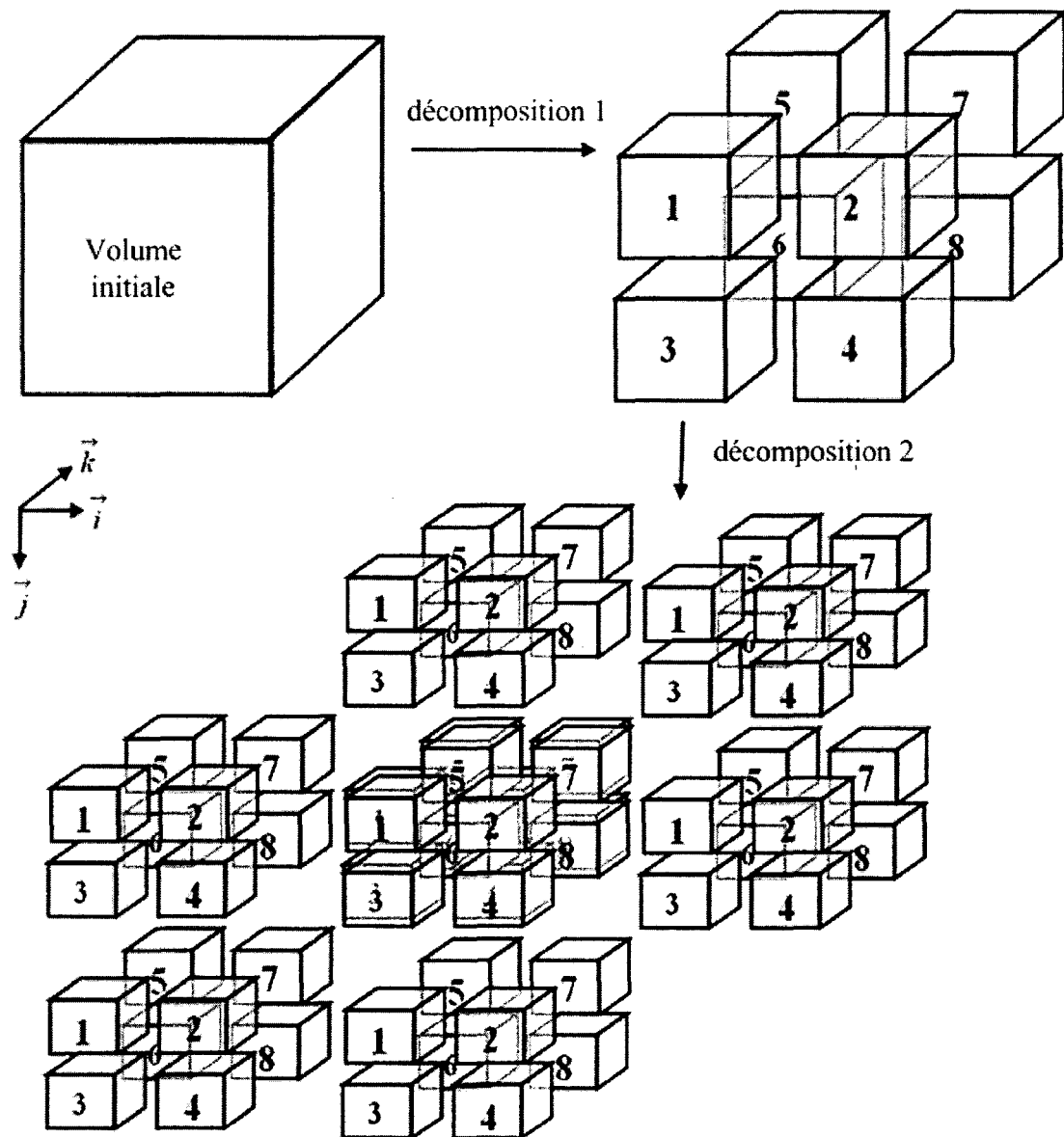


Figure 20 Schéma de décomposition (plusieurs niveaux de décomposition) d'un volume en sous-volumes

## CHAPITRE 5

### PREMIÈRE APPROCHE MULTI-RÉSOLUTION DU MIP

Cette première approche reprend directement le schéma de reconstruction progressif par ondelettes. Elle consiste à projeter indépendamment les blocs issus de la décomposition proposée. Puis l'image finale est obtenue en appliquant des opérateurs de reconstruction sur les projections de chaque bloc. Dans un premier temps, nous allons expliquer théoriquement la méthode. Ainsi, il est possible de comprendre comment reconstruire au mieux la projection finale à partir des projections de chaque bloc. Les résultats des différentes expériences relatives à cette approche sont exposés ensuite.

#### 5.1 Formulation théorique

L'objectif est de reprendre le raisonnement de Roerdink décrit au paragraphe 2.2.2, c.à.d. expliquer de manière théorique le processus de reconstruction progressif du MIP à partir de la représentation de donnée considérée.

##### 5.1.1 Projection MIP des ensembles issus de la décomposition

La définition de l'opérateur de projection  $P_z$  définie en ( 2-7 ) est étendue pour qu'il puisse être appliqué aux données issues de la décomposition proposées (paragraphe 4.1). Dans le cas d'un volume discrétisé issu de la décomposition décrite dans le chapitre précédent  $f$ ,  $f(r,s,t)$  où  $(r,s,t) \in \mathbb{R}^3$  représente une composante du volume. Chaque composante est représentée par une valeur réelle et ses marques associées.

$P_z(f)$  est la projection de la composante ayant la valeur maximum selon l'axe z :

$$P_z(f)(r, s) = comp \quad (5-1)$$

$$comp.val = f(r_1, s_1, t_1).val \text{ tel que } f(r_1, s_1, t_1).val = \bigvee_i f(r, s, t).val$$

$$comp.m = f(r_1, s_1, t_1).m \text{ tel que } f(r_1, s_1, t_1).val = \bigvee_i f(r, s, t).val$$

$f(r, s, t).val$  est la valeur de la composante  $f(r, s, t)$ .

$f(r, s, t).m$  est la marque de la composante  $f(r, s, t)$ .

$\bigvee_i f(r, s, t).val$  est le calcul du maximum entre les valeurs  $f(r, s, t).val$  avec  $(r, s)$  fixe et  $t$  variant.

### 5.1.2 Reconstruction progressive

L'équation de reconstruction en ondelette découplée définie au paragraphe 4.1.2 s'écrit comme la composante de la synthèse effectuée sur les composantes de détails  $\omega_j^\downarrow(y_{j+1}, m_{j+1})$ , et la synthèse effectuée sur les composantes d'approximation  $\psi_j^\downarrow(x_{j+1}, m_{j+1})$  :

$$x_j = \psi_j^\downarrow(x_{j+1}, m_{j+1}) \dot{+} \omega_j^\downarrow(y_{j+1}, m_{j+1}), \quad j = k-1, k-2, \dots, 0$$

Comme l'opérateur  $\dot{+}$  est le maximum, l'opérateur  $P_z$  est distributif par rapport à  $\dot{+}$ .

$$P_z(\psi_j^\downarrow(x_{j+1}, m_{j+1}) \dot{+} \omega_j^\downarrow(y_{j+1}, m_{j+1})) = P_z(\psi_j^\downarrow(x_{j+1}, m_{j+1})) \dot{+} P_z(\omega_j^\downarrow(y_{j+1}, m_{j+1})) \quad (5-2)$$

Bien que l'équation ( 5-2 ) nous permette de faire la reconstruction progressive par multi- résolution de la projection MIP, cette expression est inefficace d'un point de vue réduction de temps de calcul. En effet, pour calculer une projection à un certain niveau d'approximation  $j$ , il faudrait reconstruire  $f_L, d_{L-1}, \dots, d_j$  à pleine résolution dans un premier temps, puis appliquer l'opérateur  $P_z$  de projection MIP sur l'ensemble des

volumes. Chaque volume reconstruit étant de la taille du volume initial, le temps de calcul serait alors multiplié par le nombre de sous-volumes issus de la décomposition.

Le véritable objectif est de calculer dans un premier temps le MIP sur les coefficients du plus bas niveau de décomposition lorsque la taille des données est réduite. Puis l'opérateur de synthèse est appliqué sur la projection MIP de l'ensemble des sous-volumes, afin de reconstruire l'image de projection à un niveau plus raffiné. Cela revient à démontrer la relation suivante :

$$P_z \left( \psi_j^\downarrow(x_{j+1}) \right) + P_z \left( \omega_j^\downarrow(y_{j+1}) \right) = \psi_j^\downarrow \left( P_z(x_{j+1}) \right) + \omega_j^\downarrow \left( P_z(y_{j+1}) \right) \quad (5-3)$$

Il suffit donc de démontrer la permutation de l'opérateur de projection avec les opérateurs de synthèse comme présenté dans les équations suivantes :

$$P_z \psi_j^\downarrow(f) = \psi_j^\downarrow P_z(f) \quad (5-4)$$

$$P_z \omega_j^\downarrow(f) = \omega_j^\downarrow P_z(f) \quad (5-5)$$

#### 5.1.2.1 Permutation de la projection avec les opérateurs de synthèse

Dans un premier temps, nous nous intéressons à la permutation de l'opérateur de projection et l'opérateur de synthèse du signal d'approximation  $\psi^\downarrow$  décrite par l'équation ( 5-4 ).

Lorsque que l'expression de l'opérateur de synthèse ( 4-5 ) est utilisée avec la projection  $P_z$  définie au paragraphe 5.1.1, les deux termes de l'équation ( 5-4 ) se décomposent alors de la façon suivante :



-La première expression ( 5-6 ) correspond au placement de la composante projetée du niveau  $j+1$ ,  $P_z(x_{j+1}(n))$ , sur  $x_{j1}(2n)$  ou  $x_{j1}(2n+1)$  en fonction de la marque associée à cette composante :

$$\psi_j^\downarrow P_z : \begin{cases} x_{j1}(2n) = 0 \text{ si } P_z(x_{j+1}(n)).m = 1 \text{ sinon } x_{j1}(2n) = P_z(x_{j+1}(n)) \\ x_{j1}(2n+1) = P_z(x_{j+1}(n)) \text{ si } P_z(x_{j+1}(n)).m = 1 \text{ sinon } x_{j1}(2n+1) = 0 \end{cases} \quad (5-6)$$

$P_z(x_{j+1}(n))$  est la projection des éléments d'indice  $n$  des séquences  $x_{j+1}(n)$  du niveau de résolution  $j+1$  rencontrées sur l'axe  $z$ .  $x_{j1}(2n)$  et  $x_{j1}(2n+1)$  représente le signal de résolution supérieure obtenue par l'application de l'opérateur de synthèse sur les données projetées. Comme nous pouvons le voir dans cette expression, le passage à la résolution supérieure nécessite l'insertion de zéros.

- La deuxième expression ( 5-7 ) représente la projection des éléments d'indice  $2n$  et  $2n+1$  des séquences  $x_{j+1}(n)$  reconstruite au niveau de résolution  $j$ . Ainsi  $x_{j2}(2n)$  et  $x_{j2}(2n+1)$  sont respectivement la projection des données  $x_j(2n)$   $x_j(2n+1)$  sur l'axe  $z$ .

$$P_z \psi_j^\downarrow : \begin{cases} x_{j2}(2n) = P_z(x_j(2n)) \\ x_{j2}(2n+1) = P_z(x_j(2n+1)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{j2}(2n) = P_z(x_{j+1}(n)) \text{ tel que } x_{j+1}(n).m = 0 \\ x_{j2}(2n+1) = P_z(x_{j+1}(n)) \text{ tel que } x_{j+1}(n).m = 1 \end{cases} \quad (5-7)$$

Les données  $x_j(2n)$   $x_j(2n+1)$  résultent de l'opération de synthèse, décrite par l'expression ( 4-5 ), appliquée aux séquences  $x_{j+1}(n)$ .

Pour démontrer l'égalité entre les deux termes de l'équation ( 5-4 ), respectivement  $P_z \psi_j^\downarrow(f)$  et  $\psi_j^\downarrow P_z(f)$ , il suffit de prouver l'égalité entre leurs composantes exprimées dans les expressions ( 5-6 ) et ( 5-7 ) :

$$P_z \psi_j^\downarrow(f) = \psi_j^\downarrow P_z(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{j1}(2n) = x_{j2}(2n) \\ x_{j1}(2n+1) = x_{j2}(2n+1) \end{cases} \quad ( 5-8 )$$

Or la composante projetée  $P_z(x_{j+1}(n))$  du niveau de résolution  $j+1$ , utilisée dans l'expression ( 5-6 ) est en fait égale au maximum des deux composantes projetées  $P_z(x_j(2n))$  et  $P_z(x_j(2n+1))$  du niveau de résolution  $j$ , utilisée dans l'expression ( 5-7 ). En se référant aux composantes  $x_{j2}(2n)$  ou  $x_{j2}(2n+1)$  de l'expression ( 5-7 ), il est alors possible d'écrire :

$$P_z(x_{j+1}(n)) = \max(x_{j2}(2n), x_{j2}(2n+1)) \quad ( 5-9 )$$

Par conséquent, si  $P_z(x_{j+1}^z(n)) = x_{j2}(2n)$ , alors  $x_{j2}(2n) = x_{j1}(2n)$  mais  $x_{j2}(2n+1) \geq x_{j1}(2n+1)$  car  $x_{j1}(2n+1) = 0$  et les valeurs des composantes sont toujours positifs. Et si  $P_z(x_{j+1}^z(n)) = x_{j2}(2n+1)$ , alors  $x_{j2}(2n+1) = x_{j1}(2n+1)$  mais  $x_{j2}(2n) \geq x_{j1}(2n)$  car  $x_{j1}(2n) = 0$ . Donc l'égalité ( 5-4 ) ne peut être vérifiée. Il est seulement possible d'écrire la relation d'inégalité suivante :

$$P_z \psi_j^\downarrow(f) \geq \psi_j^\downarrow P_z(f) \quad ( 5-10 )$$

Le même raisonnement s'applique pour vérifier l'égalité ( 5-5 ) avec l'opérateur de synthèse ( 4-6 ). De même, cette égalité ne peut être démontrée. Il est seulement possible d'écrire l'inégalité :

$$P_z \omega_j^\downarrow(f) \geq \omega_j^\downarrow P_z(f) \quad (5-11)$$

L'inégalité suivante est alors déduite des inégalités ( 5-10 ) et ( 5-11 ) :

$$P_z \left( \psi_j^\downarrow(x_{j+1}) \right) \dot{+} P_z \left( \omega_j^\downarrow(y_{j+1}) \right) \geq \psi_j^\downarrow \left( P_z(x_{j+1}) \right) \dot{+} \omega_j^\downarrow \left( P_z(y_{j+1}) \right) \quad (5-12)$$

Il n'est donc pas possible de permuter l'opérateur de projection avec les opérateurs de synthèses. Par conséquent, la projection MIP d'un volume ne peut être reconstruite exactement par un calcul progressif effectué sur les sous-volumes issus de la décomposition. Cependant, les expressions ( 5-6 ) et ( 5-9 ) prouvent que les valeurs maximums du signal sont globalement conservées.

### 5.1.2.2 Évaluation de l'erreur

Dans un deuxième temps, nous nous intéressons à l'évaluation de l'expression

$P_z \left( \psi_j^\downarrow(x_{j+1}) \right) \dot{+} P_z \left( \omega_j^\downarrow(y_{j+1}) \right)$  par rapport à l'expression  $\psi_j^\downarrow \left( P_z(x_{j+1}) \right) \dot{+} \omega_j^\downarrow \left( P_z(y_{j+1}) \right)$  dont la relation d'inégalité est exprimée dans ( 5-12 ). Les deux termes de l'inégalité se décomposent ainsi :

- Le premier terme s'exprime en combinant les composantes obtenues par l'expression de  $P_z \left( \psi_j^\downarrow(x_{j+1}) \right)$  dans ( 5-7 ) et les composantes  $y_{j2}(2n)$  et  $y_{j2}(2n+1)$  obtenues par l'expression de  $P_z \left( \omega_j^\downarrow(y_{j+1}) \right)$  avec l'opérateur  $\dot{+}$ .

Comme l'opérateur  $\dot{+}$  est le maximum, les composantes résultantes  $c_{j2}(2n)$  et  $c_{j2}(2n+1)$  s'écrivent alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 & P_z \left( \psi_j^\downarrow(x_{j+1}) \right) \dot{+} P_z \left( \omega_j^\downarrow(y_{j+1}) \right) \quad (5-13) \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} c_{j2}(2n) = \max(y_{j2}(2n), x_{j2}(2n)) \\ c_{j2}(2n+1) = \max(y_{j2}(2n+1), x_{j2}(2n+1)) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} c_{j2}(2n) = \max(P_z(y_{j+1}(n)), P_z(x_{j+1}(n))) \text{ tel que } y_{j+1}(n).m = 1 \text{ et } x_{j+1}(n).m = 0 \\ c_{j2}(2n+1) = \max(P_z(y_{j+1}(n)), P_z(x_{j+1}(n))) \text{ tel que } y_{j+1}(n).m = 0 \text{ et } x_{j+1}(n).m = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

- De même le deuxième terme s'exprime en combinant les composantes obtenues par l'expression de  $\psi_j^\downarrow(P_z(x_{j+1}))$  dans ( 5-6 ) et les composantes  $y_{j1}(2n)$  et  $y_{j1}(2n+1)$  obtenues par l'expression de  $\omega_j^\downarrow(P_z(y_{j+1}))$  avec l'opérateur  $\dot{+}$ . Cependant, quatre cas sont à considérer. Ces cas dépendent de la marque associée aux composantes projetées  $P_z(x_{j+1}(n))$  et  $P_z(y_{j+1}(n))$  des différents blocs de données du niveau de résolution  $j+1$ .

$$\psi_j^\downarrow(P_z(x_{j+1})) \dot{+} \omega_j^\downarrow(P_z(y_{j+1})) \quad (5-14)$$

L'objectif est de pouvoir évaluer l'erreur entre ces deux termes suivant les différents cas. En particulier, nous cherchons à minimiser l'erreur entre les composantes  $c_{j2}(2n)$   $c_{j2}(2n+1)$  de la partie droite de l'inégalité ( 5-12 ) et les composantes  $c_{j1}(2n)$  et  $c_{j1}(2n+1)$  de la partie gauche.

### 5.1.2.2.1 $P_z(x_{j+1}(n))$ et $P_z(y_{j+1}(n))$ ont des marques identiques

Dans le cas où les projections  $P_z(x_{j+1}(n))$  et  $P_z(y_{j+1}(n))$  ont des marques identiques, l'application de l'opérateur de synthèse sur ces coefficients est immédiate. En effet, les marques identiques permettent de réordonner les deux composantes sans ambiguïté. Deux alternatives sont envisageables dans ce cas ci. D'une part, lorsque les deux composantes projetées sont marquées :

$$(5-14) \Leftrightarrow \begin{cases} c_{j1}(2n) = \max(P_z(y_{j+1}(n)), 0) \\ c_{j1}(2n+1) = \max(0, P_z(x_{j+1}(n))) \end{cases}, \text{ si } P_z(y_{j+1}(n)).m=1 \text{ et } P_z(x_{j+1}(n)).m=1 \quad (5-15)$$

D'autre part lorsque aucune des deux composantes n'est marquée :

$$(5-14) \Leftrightarrow \begin{cases} c_{j1}(2n) = \max(0, P_z(x_{j+1}(n))) \\ c_{j1}(2n+1) = \max(P_z(y_{j+1}(n)), 0) \end{cases}, \text{ si } P_z(y_{j+1}(n)).m=0 \text{ et } P_z(x_{j+1}(n)).m=0 \quad (5-16)$$

Il est possible de démontrer facilement que l'égalité entre la partie droite et la partie gauche de l'expression ( 5-12 ) est au moins vérifiée pour la composante d'indice  $2n$  ou la composante d'indice  $2n+1$ . En effet, la démonstration présentée en annexe montre que pour l'alternative ( 5-15 )  $c_{j1}(2n+1) = c_{j2}(2n+1)$ , et pour l'alternative ( 5-16 ),  $c_{j1}(2n) = c_{j2}(2n)$ .

Cependant, il est aussi démontré dans l'annexe que l'égalité n'est pas obtenue sur la valeur de la deuxième composante. Mais il est possible de majorer cette erreur grâce à un encadrement sur lequel nous pouvons estimer la valeur attendue. En effet, pour l'alternative ( 5-15 ), la valeur de la composante  $c_{j2}(2n)$  peut être située dans un intervalle donné à partir des composantes de la partie gauche de l'inégalité ( 5-12 ) :

$$c_{j1}(2n) \leq c_{j2}(2n) \leq c_{j1}(2n+1)$$

De même pour l'alternative ( 5-16 ), l'erreur obtenue à partir des composantes du deuxième terme de l'inégalité sur l'estimation de la composante  $c_{j_2}(2n+1)$  peut être majorée par l'intervalle suivant :

$$c_{j_1}(2n+1) \leq c_{j_2}(2n+1) \leq c_{j_1}(2n)$$

#### 5.1.2.2.2 $P_z(x_{j+1}(n))$ et $P_z(y_{j+1}(n))$ ont des marques différentes

Dans les cas où  $P_z(x_{j+1}(n))$  et  $P_z(y_{j+1}(n))$  ont des marques différentes, l'application de l'opérateur de synthèse sur les coefficients est plus ambiguë. En effet, l'information donnée par les marques indique que les deux coefficients issus de la projection se réordonnent sur le même indice  $2n$  ou  $2n+1$ . Aucune valeur ne peut être attribuée à la composante du deuxième indice. Deux alternatives sont aussi envisageables dans ce cas ci. D'une part, lorsque la composante d'indice  $2n$  est nulle :

$$(5-14) \Leftrightarrow \begin{cases} c_{j_1}(2n) = \max(0, 0) \\ c_{j_1}(2n+1) = \max(P_z(y_{j+1}(n)), P_z(x_{j+1}(n))) \end{cases}, \text{ si } P_z(y_{j+1}(n)) \cdot m = 0 \text{ et } P_z(x_{j+1}(n)) \cdot m = 1 \quad (5-17)$$

D'autre part, lorsque la composante d'indice  $2n+1$  est nulle :

$$(5-14) \Leftrightarrow \begin{cases} c_{j_1}(2n) = \max(P_z(y_{j+1}(n)), P_z(x_{j+1}(n))) \\ c_{j_1}(2n+1) = \max(0, 0) \end{cases}, \text{ si } P_z(y_{j+1}(n)) \cdot m = 1 \text{ et } P_z(x_{j+1}(n)) \cdot m = 0 \quad (5-18)$$

De même, il est possible de démontrer facilement que l'égalité entre la partie droite et la partie gauche de l'expression ( 5-12 ) est au moins vérifiée pour la composante non nulle. En effet, le maximum local entre les deux indices  $2n$  et  $2n+1$  est conservé. Ainsi pour l'alternative ( 5-17 )  $c_{j_1}(2n+1) = c_{j_2}(2n+1)$ , et pour l'alternative ( 5-18 )  $c_{j_1}(2n) = c_{j_2}(2n)$ .

Cependant, il est démontré dans l'annexe qu'il est aussi possible d'estimer la valeur attendue pour la composante nulle de la partie gauche de l'inégalité ( 5-12 ). En effet, pour l'alternative ( 5-17 ), la valeur de la composante  $c_{j_2}(2n)$  peut être située dans l'intervalle suivant :

$$P_z(y_{j+1}(n)) \leq c_{j_2}(2n) \leq P_z(x_{j+1}(n))$$

De même pour l'alternative ( 5-18 ), la valeur de la composante  $c_{j_2}(2n+1)$  peut être estimée dans un intervalle donné à partir des valeurs des projections  $P_z(x_{j+1}(n))$  et  $P_z(y_{j+1}(n))$  obtenues sur les différents blocs :

$$P_z(y_{j+1}(n)) \leq c_{j_2}(2n+1) \leq P_z(x_{j+1}(n))$$

Dans ce cas ci, il est donc aussi possible de majorer l'erreur pour une valeur approximative donnée à la composante nulle. Cependant, à la différence du cas précédent, aucune marque ne peut être attribuée à cette composante. Ceci a pour conséquence de générer une erreur difficilement évaluable lors de la synthèse du signal au niveau de résolution supérieur.

## 5.2 Résultats

Comme il a été démontré théoriquement dans le paragraphe précédent, il n'est pas possible d'obtenir la reconstruction parfaite avec la forme progressive du MIP sur les données décomposées. Il est cependant possible de donner un résultat approximatif proche du résultat attendu. En effet, les valeurs incertaines peuvent être évaluées dans un intervalle précis défini dans les paragraphes précédents. Ainsi, deux catégories d'erreurs ont été identifiées dans l'étude théorique (paragraphe 5.1.2.2.1 et 5.1.2.2.2). La première à la différence de la seconde permet la conservation des marques, informations essentielles pour le processus de reconstruction.

L'objectif des différentes expériences qui suivent, est d'évaluer les conséquences visuelles des approximations effectuées. Une première série d'expériences utilise les deux catégories d'approximations présentées aux paragraphes 5.1.2.2.1 et 5.1.2.2.2.

Ensuite, seule l'approximation qui permet la conservation des marques (paragraphe 5.1.2.2.1 ) est utilisée. Enfin, la dernière expérience essaie de trouver la meilleure combinaison entre les deux catégories d'approximation et l'utilisation des filtres adaptés, pour obtenir un résultat optimal.

L'image volumique « head », de taille 256\*256\*112, a été utilisée pour toutes les expériences. Les approximations ont été faites en attribuant aux valeurs incertaines la valeur minimale de leur intervalle de valeur probable (paragraphes 5.1.2.2.1 et 5.1.2.2.2).

### **5.2.1 Première expérience**

Deux cas sont à distinguer dans le contexte de la deuxième expérience. Le premier cas ; lorsque l'on travaille sur les données décomposées sur un seul niveau, se distingue des cas où plusieurs niveaux de décompositions sont effectués. En effet, la perte des marques causée par la deuxième approximation (paragraphe 5.1.2.2.2) a des conséquences sur la reconstruction de l'image au niveau supérieur. Plus le nombre de décomposition augmente plus cet effet prend de l'importance.

#### **5.2.1.1 Une seule décomposition**

L'opérateur MIP est appliqué à chacun des sous-volumes issus de la décomposition, puis l'image finale est recomposée en appliquant les opérateurs de synthèse et les approximations des paragraphes 5.1.2.2.1 et 5.1.2.2.2. Comme on le voit sur la figure 21, l'image obtenue est très semblable à la l'image de référence. L'erreur est produite par des pixels dispersés ayant une valeur inférieure à ce qu'ils devraient avoir. Mais les maximums de l'image sont intacts. Les vaisseaux sanguins sont très nettement visibles.



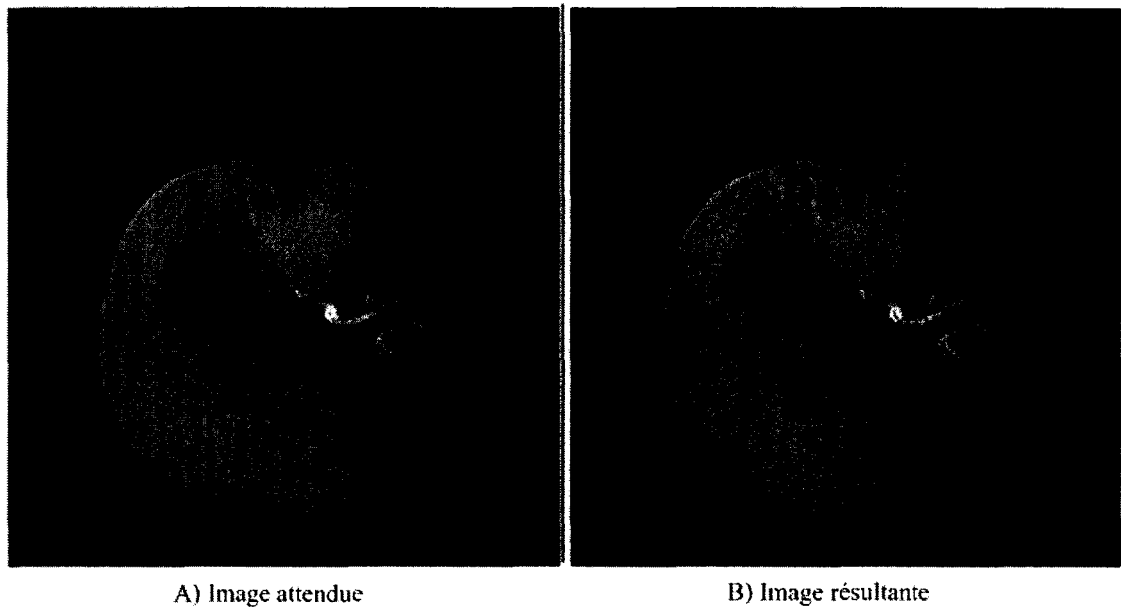


Figure 21 MIP progressif après une décomposition

Le résultat final s'obtient avec seulement sept huitièmes des données. En effet, un des sous-volumes peut être négligé car il n'apporte aucune information (paragraphe 4.2.2). Il y a un huitième de données en moins à parcourir par les rayons de projection et en conséquence, un gain de temps du même ordre.

#### 5.2.1.2 Plusieurs décompositions

Pour analyser la convergence de l'erreur d'approximation, il est intéressant d'analyser le résultat après plusieurs niveaux de décomposition. Le MIP progressif a été effectué avec tous les blocs dans un premier temps afin d'évaluer l'erreur d'approximation.

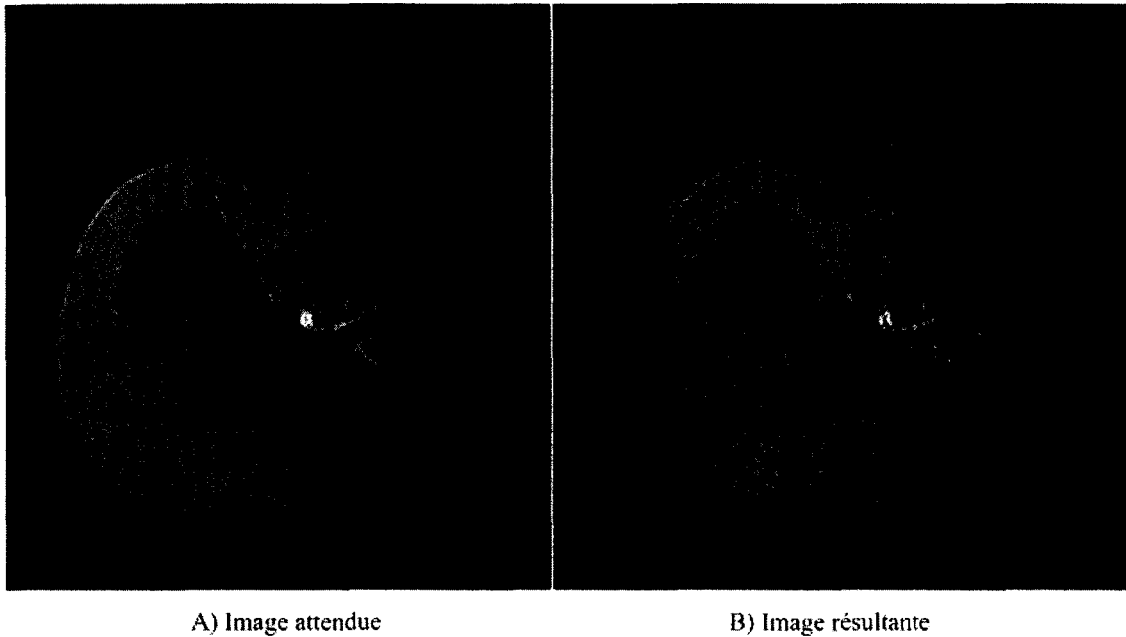


Figure 22 MIP progressif après quatre décompositions

L'erreur croît avec le nombre de niveaux de reconstruction. Les résultats sont visibles à l'annexe 2. En effet, le fait d'approximer la simple valeur n'est pas suffisant. L'erreur sur la connaissance des marques des pixels à problèmes (paragraphe 5.2.1.2) se répercute sur les reconstructions des niveaux supérieurs.

Certains pixels approximés dans les niveaux inférieurs, n'ayant aucune information donnée par les marques, se retrouvent alors incorrectement placés.

### 5.2.2 Deuxième expérience

Les approximations faites dans le cas du paragraphe 5.1.2.2.2 ne permettent pas d'associer des « marques » sur les valeurs incertaines. Ce manque d'information induit des erreurs supplémentaires et ne permet plus de garder la relation ( 5-12 ). D'autres expériences ont été réalisées sans effectuer ces approximations. Les résultats sont visibles à l'annexe 3.

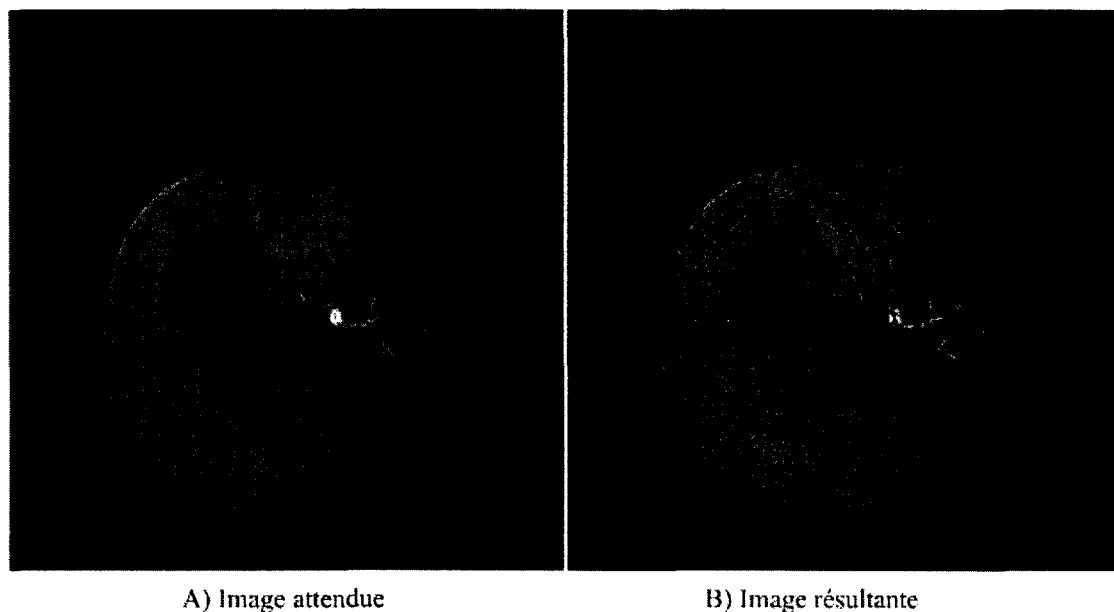


Figure 23 MIP progressif à approximation limitée après 4 décompositions

Le nombre de pixels noirs correspondant au cas du paragraphe 5.1.2.2.2 augmente avec le nombre de décompositions. Mais comme nous pouvons le voir sur la figure 23, l'image résultante donne une bonne approximation du résultat final.

### 5.2.3 Troisième expérience

Pour obtenir les meilleurs résultats possibles, des filtres ont été appliqués après chaque niveau de décomposition. Une première catégorie de filtres a été définie pour « boucher » les trous. Tous les pixels de valeur nulle, et dont au moins un certain nombre de voisins sont non nuls, ont leur valeur remplacée par une valeur moyenne des pixels non nuls avoisinants.

Une autre catégorie de filtres a été définie pour éliminer les pixels isolés de valeur largement supérieure à leur voisinage. Ce filtre est nécessaire lorsque l'on utilise l'approximation décrite au paragraphe 5.1.2.2.2. Il permet de corriger la valeur des pixels n'étant pas « marqués » et dont la position paraît aberrante.

Ainsi, une troisième série d'expériences a été faite en utilisant les filtres, afin de trouver la meilleure combinaison possible: celle qui donne la meilleure qualité de résultat, avec un nombre minimum de données du volume initial. Les résultats sont visibles dans l'annexe 4.

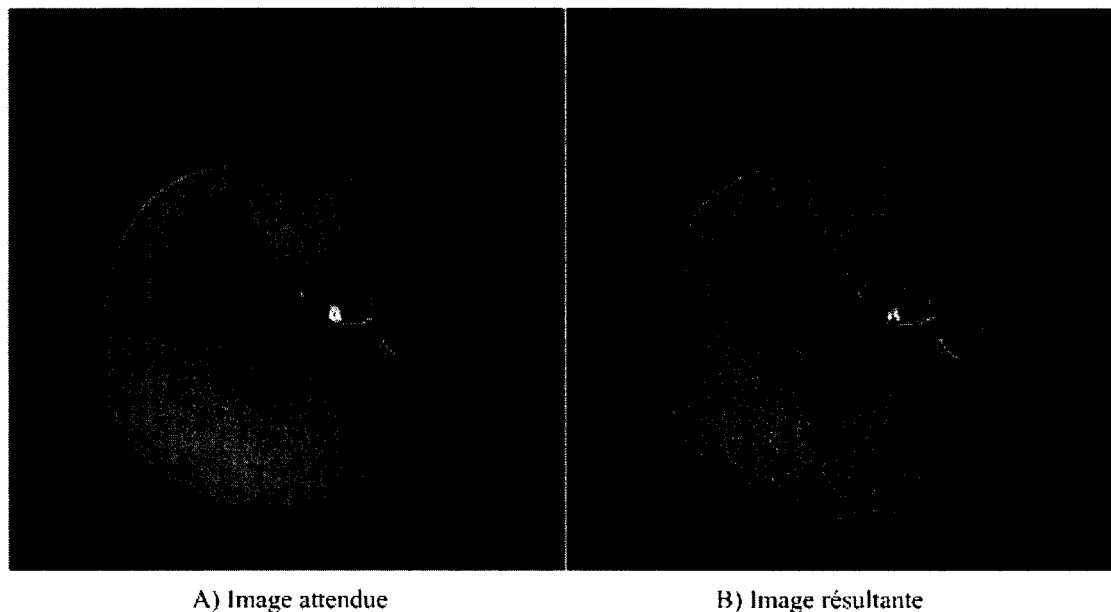


Figure 24 MIP progressif avec filtrage et calculé avec 33% des données du volume initial

L'utilisation des filtres adaptés permet de n'utiliser que partiellement les données issues de la décomposition, sans altérer la qualité du résultat. La figure 24 montre qu'il est possible d'obtenir une bonne approximation du résultat final avec seulement 33 % des données initiales. Cependant il n'est pas possible d'obtenir une meilleur qualité d'image.

Plus le niveau de décomposition augmente plus il est possible de faire des compressions, mais plus le résultat est de mauvaise qualité. En effet, dans les expériences précédentes, il a été montré que plus le nombre de décompositions augmente, moins il est possible d'obtenir un résultat de qualité satisfaisante.

### 5.3 Conclusion

Cette méthode est satisfaisante lorsque l'on se restreint à un seul niveau de hiérarchie dans la construction de l'image MIP d'un volume. En effet, l'image finale est de qualité satisfaisante. La première image de basse résolution est bien représentative de l'image finale. Il est possible d'obtenir une compression des données initiales d'environ 91% si elles sont codées sur 32 bits et de 97% si elles sont codées sur 16 bits. La compression diminue avec le nombre de bits accordé à chaque donnée. En effet, l'espace réservé aux « marques » en bits est de trois demis le nombre de données (paragraphe 4.2.2). La limite maximum de compression des données initiales peut seulement atteindre sept huitièmes. La qualité des résultats se dégrade quand le nombre de décompositions augmente. Les images finales sont difficilement exploitables dans l'exigence du contexte médical. Cependant, elles donnent une bonne approximation du résultat espéré avec une meilleure compression. Il est possible d'envisager de reconstruire localement le volume initial pour améliorer le résultat final de manière satisfaisante.

## CHAPITRE 6

### DEUXIÈME APPROCHE

Les résultats obtenus par la première approche ne sont pas très intéressants. L'erreur sur l'image finale est trop importante lorsque le nombre de décompositions sur les données est supérieur à un. La qualité obtenue de l'image est trop médiocre pour que le résultat soit exploitable. Cependant il est possible d'obtenir un résultat très approximatif avec seulement moins de 30% des données initiales. Dans certains cas, ce résultat approximatif n'a pratiquement pas évolué lorsque 100% des données sont utilisées. Un nombre important de sous volumes de données n'influent pratiquement pas dans la construction de l'image de projection. La deuxième approche exploite cette constatation. Dans un premier temps nous allons expliquer cette approche de manière théorique. Puis nous allons présenter les différents résultats.

#### 6.1 Formulation théorique

La formalisation de la décomposition proposée en ondelettes découplées (paragraphe 4.1.2) est reprise pour expliquer théoriquement la construction progressive d'une projection MIP. Dans le paragraphe 5.1.2, il a été démontré qu'une reconstruction progressive du MIP est possible par l'expression :

$$M_z(\psi_j^\downarrow(x) + \omega_j^\downarrow(y)) = M_z(\psi_j^\downarrow(x_{j+1})) + M_z(\omega_j^\downarrow(y_{j+1}))$$

Cette expression est inefficace d'un point de vue réduction de temps de calcul lorsque la méthode classique de lancer de rayons est utilisée pour calculer le MIP. En effet, pour calculer une projection à un certain niveau d'approximation  $j$ , il faudrait avoir appliqué les opérateurs de synthèse sur chaque sous ensemble  $f_L, d_{L-1}, \dots, d_j$ , puis appliquer l'opérateur MIP  $M_z$  sur chaque volume issu de la reconstruction des sous-

ensembles  $f_L, d_{L-1}, \dots, d_j$  dont la taille de chacun serait celle du volume initial. Le temps de calcul du MIP par lancer de rayons serait multiplié par le nombre de sous ensembles  $f_L, d_{L-1}, \dots, d_j$  issus de la décomposition.

La deuxième approche proposée utilise la méthode de projection utilisée par Lukas Mroz (paragraphe 2.1.1). Cette méthode est efficace lorsque les données volumiques contiennent un grand nombre de valeurs nulles. La vitesse de projection ne dépend pas de la taille du volume, mais du nombre de données non nulles. Or, l'application de l'opérateur de synthèse, n'implique seulement que des insertions de zéros. Le traitement des sous volumes reconstruits (auxquels ont été appliqué l'opérateur de synthèse) n'implique donc pas d'augmentation de temps de calculs. De plus, leur espace de stockage, n'est pas augmenté. En effet, selon la structure de données proposée par Lukas Mroz (paragraphe 2.1.1.2), les valeurs nulles ne sont pas stockées. Une reconstruction progressive efficace du MIP est alors envisageable.

La deuxième approche consiste donc à séparer le processus de reconstruction. Les opérateurs de synthèse sont appliqués indépendamment sur chaque sous-volume avant d'être projetés. La reconstruction progressive se fait en appliquant l'opérateur d'addition successivement avec les projections des sous-volumes.

## 6.2 Sélection des sous ensembles

Les résultats de la première méthode ont montré qu'il était possible d'obtenir l'image finale de la projection en ne traitant seulement qu'un petit nombre de sous ensembles sélectionnés de manière pertinente. En effet, le principe de la décomposition proposée effectue une sélection des données. Chaque sous ensemble après chaque décomposition peut être classé selon son importance de contribution (paragraphe 4.2.2). Cependant il est difficile d'effectuer un classement théorique lorsque plusieurs décompositions récurrentes ont été appliquées. La sélection des sous volumes pertinents se fait lors d'un

prétraitement où la contribution de chaque sous ensemble dans l'obtention de l'image finale de projection est évaluée. Chaque sous volume est alors classé selon l'ordre d'importance.

Étant donné que la décomposition se fait dans trois directions privilégiées correspondant aux trois axes de l'espace, la sélection des sous volumes pertinents ne sera pas la même selon l'angle de visualisation. Afin, d'obtenir une sélection des sous volume la plus indépendante possible de l'angle de visualisation, le classement est basé sur le pourcentage moyen de contribution des sous volumes obtenus dans chaque direction privilégiée de la décomposition - c.à.d. celle des trois axes de l'espace.

### **6.3 Description de l'algorithme**

L'algorithme de rendu consiste à effectuer un prétraitement qui permet de classer les données suivant leur importance de contribution. Deux classements sont réalisés à différents niveaux. Le premier classement consiste à ordonner les voxels de chaque sous volume suivant l'ordre croissant de leur valeur. Le deuxième classement consiste à ordonner les sous volumes issus de la décomposition proposée suivant leur importance de contribution dans le calcul du rendu MIP. Ainsi, le rendu peut être effectué par ordre prioritaire de sous volume, et, ou de valeur de voxel. Le compromis qualité versus rapidité peut être ainsi optimisé selon deux critères.

#### **6.3.1 Prétraitement**

- 1.1- La transformation en ondelette (décrite au paragraphe 4.1.2) est effectuée à n niveaux de décomposition.*
- 1.2- Chaque sous-volume est reconstruit indépendamment au niveau de résolution initiale.*
- 1.3- Chaque sous-volume reconstruit est stocké selon la structure de donnée décrite dans le paragraphe sur le MIP de Mroz (paragraphe 2.1.1.2) : chaque sous-volume est stocké sous forme de tableau de coordonnées, rangées par ordre*



*croissant selon la valeur du voxel auquel elles se réfèrent. Un tableau d'index sur le tableau de coordonnées permet de connaître implicitement la valeur des voxels.*

*1.4- Pour chaque sous-volume, un pourcentage de contribution dans la projection MIP est évalué :*

*- Pour chaque sous-volume, les coordonnées, de chaque voxel, référencées par le tableau d'index sont multipliées par la matrice de projection. Le résultat correspond aux coordonnées du pixel de l'image de projection sur lequel le voxel est projeté.*

*- Si la valeur du voxel est égale à la valeur du pixel (sur lequel le voxel est projeté) de l'image de projection MIP obtenue à partir du volume initial, l'indicatif correspondant à la contribution du sous volume est incrémenté.*

*Ainsi pour chaque sous-volume, un pourcentage de contribution est calculé puis stocké dans un tableau. Ce pourcentage correspond au rapport entre le nombre de voxels contribuant du sous volume sur le nombre de voxels total du sous volume.*

*Pour chacune des directions de l'espace, ce pourcentage est calculé. Ceci afin d'obtenir un pourcentage moyen de contribution du sous volume qui soit indépendant de l'axe de projection.*

*1.5- Les sous-volume sont classés par ordre décroissant de leur contribution moyenne. Un pourcentage cumulatif est calculé à chaque niveau du classement. Il correspond au rapport entre le nombre de voxels contribuant cumulatif sur le nombre de pixels contenus dans l'image de projection.*

*Les sous-volume classés après le sous volume dont le pourcentage cumulatif atteint une valeur seuil, sont éliminés.*

*1.6- Un tableau contenant les références de chaque sous-volume restant, classées dans l'ordre décroissant de leur importance de contribution est sauvegardé.*

### **6.3.2 Rendu**

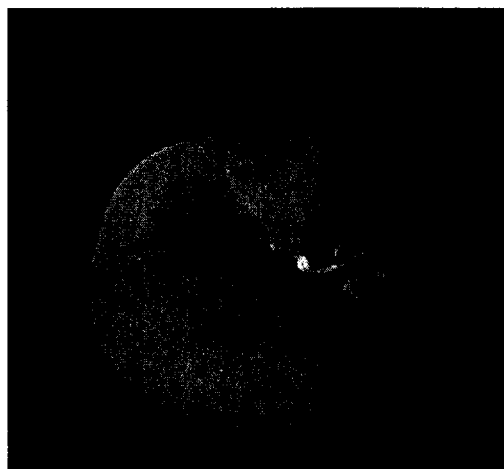
*2.1 - Pour chaque sous volume restant, la projection MIP est effectuée selon les critères de priorité. La projection finale est obtenue par addition progressive des différentes projections obtenues avec les différents sous- volume.*

## **6.4 Résultats**

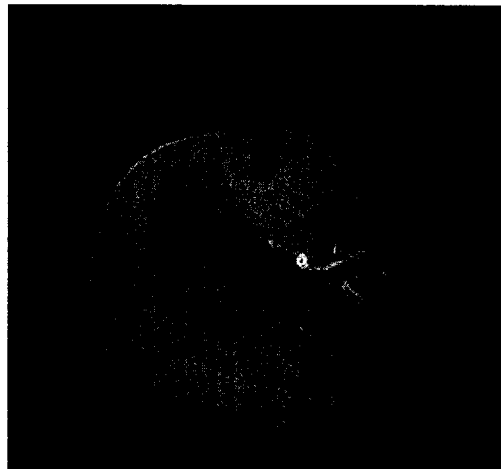
Les résultats ont été obtenus à partir de l'ensemble d'images « head » de taille 256\*256\*112. Ce volume d'images ne permet qu'un maximum de quatre décompositions. Pour chaque niveau de décomposition, la projection MIP a été réalisée avec un nombre variable de sous-volumes. L'erreur correspond au pourcentage de pixels justes non nuls sur le nombre de pixels totaux non nuls de l'image de projection.

### **6.4.1 Projection axiale**

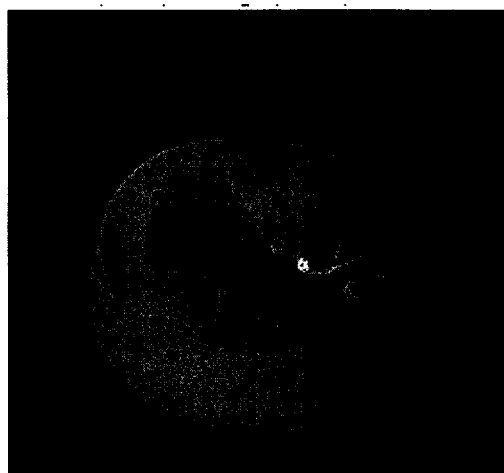
Les premiers résultats ont été obtenus pour le cas d'une projection axiale suivant l'axe z. Le prétraitement n'évalue la contribution de chaque voxel que pour le cas de la projection selon l'axe z. Les figures 25 et 26 montrent la reconstruction progressive du MIP après respectivement deux puis quatre décompositions. Les images obtenues après une et trois décompositions sont disponibles à l'annexe 4.



2 % de coefficients inexacts avec 41 %  
des données initiales



10 % de coefficients inexacts avec  
25 % des données initiales



25 % de coefficients inexacts avec  
14 % des données initiales

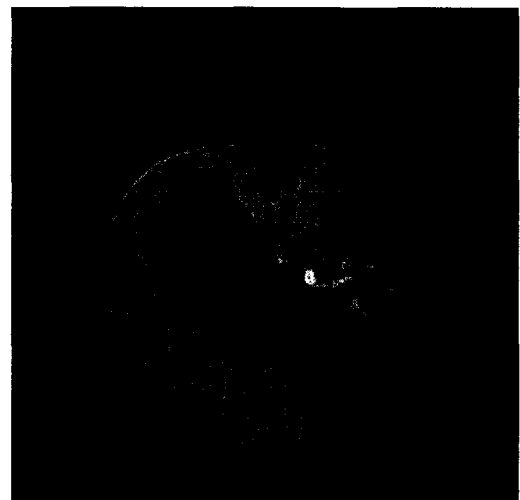


50 % de coefficients inexacts avec 6 %  
des données initiales

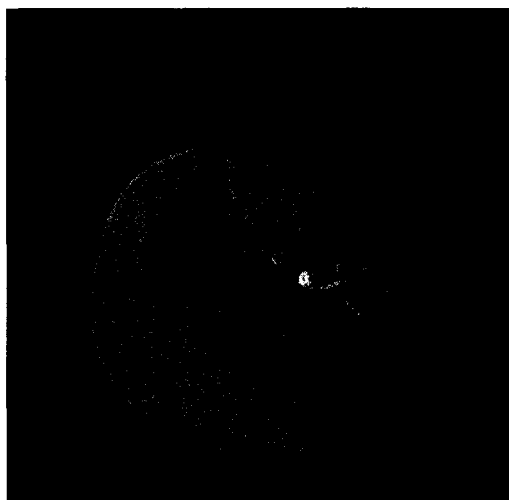
Figure 25 Reconstruction progressive après 2 décompositions



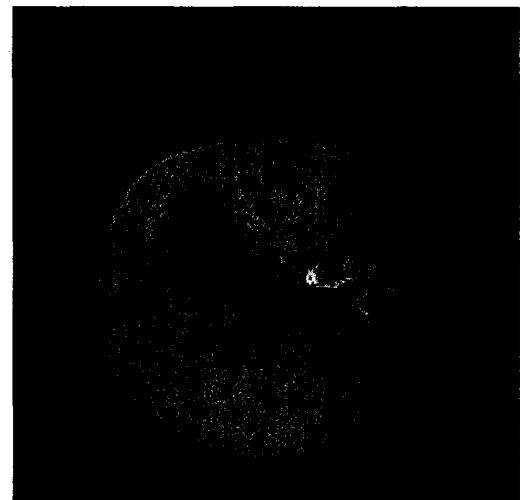
2 % de coefficients inexacts avec 20 %  
des données initiales



10 % de coefficients inexacts avec  
10 % des données initiales



25 % de coefficients inexacts avec 5 %  
des données initiales



50 % de coefficients inexacts avec 2 %  
des données initiales

Figure 26 Reconstruction progressive après 4 décompositions

Ainsi avec deux décompositions, 41 % des données du volume original sont nécessaires pour obtenir 98 % du résultat final de la projection. Alors qu'avec deux décompositions seulement 20 % des données initiales sont requises pour obtenir le même résultat. Aussi, nous pouvons voir que la qualité visuelle de la progression dans la reconstruction de

l'image MIP est différente suivant le niveau de décomposition utilisée. Lorsque le niveau est plus petit, les images intermédiaires sont plus représentatives sur l'aspect global du résultat attendu au détriment de la qualité de rendu sur les structures de haute intensité.

Une erreur maximale de 2 % sur le nombre de pixels justes, permet d'avoir une qualité satisfaisante de l'image finale. Les structures vasculaires les plus fines sont parfaitement visibles. Les 2 % d'erreur se situent dans des zones où l'intensité est minimale. Ceci ne perturbe donc pas la qualité de visualisation des structures de hautes intensités qui représentent l'objet d'intérêt dans le contexte d'un rendu MIP

La figure 27 met en évidence la rapidité de convergence de l'algorithme en fonction du nombre de décompositions utilisées sur les données initiales.

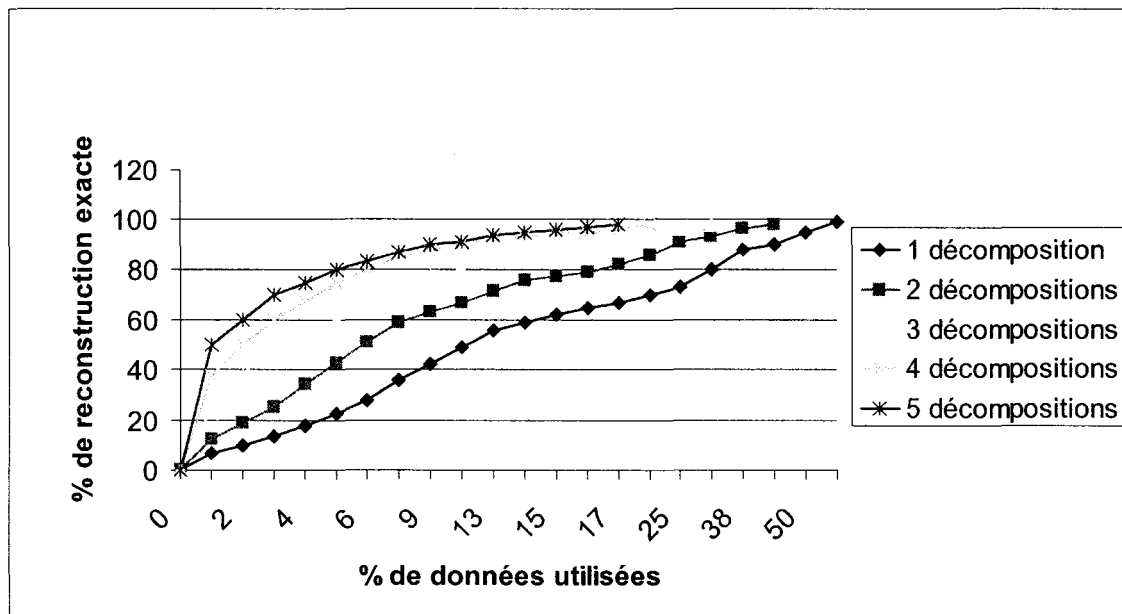


Figure 27 Rapidité de convergence selon le nombre de décomposition

Comme le montrent les résultats, la compression s'améliore quand le niveau de décomposition augmente. Moins de données sont nécessaires, lorsque le niveau de décomposition augmente, pour obtenir une bonne qualité de l'image finale de projection. Aussi, l'importance de contribution des sous volume décroît exponentiellement dans le classement des sous volume. Avec seulement 2 % des sous volumes, on obtient 50 % du résultat final. Mais, il faut 20 % des sous volumes pour atteindre 98 % du résultat final.

#### 6.4.2 Projection dans n'importe quelle direction de l'espace

Etant donné que la décomposition se fait dans trois directions privilégiées correspondant aux trois axes de l'espace, la sélection des sous volumes pertinents ne sera pas la même selon l'angle de visualisation. La deuxième série de résultats a été obtenue en moyennant le pourcentage de contribution des sous volumes obtenus dans chaque direction de l'espace. Ils sont retranscrits dans le tableau I.

Tableau I

Comparaison entre les pourcentages de données initiales utilisés pour obtenir 98% du résultat final

	% de données initiales utilisées pour une seule direction de l'espace	% de données initiales utilisées pour toutes les directions de l'espace
<b>1 décompositions</b>	62	87
<b>2 décompositions</b>	41	55
<b>3 décompositions</b>	28	37
<b>4 décompositions</b>	20	27

Lorsque le niveau de décomposition augmente, nous remarquons que les résultats obtenus dans les expériences ne tenant compte que d'une seule direction de l'espace se rapprochent de ceux obtenus dans les expériences incluant toutes les directions de l'espace. L'aspect directionnel de la décomposition s'atténue.

Ainsi 25 % des données du volume original sont nécessaires pour obtenir 98 % du résultat final de la projection pour le cas des projections faites avec un prétraitement

incluant les trois directions de l'espace, lorsque quatre niveaux de décomposition sont effectués. Les projections effectuées selon des axes déviés des trois axes de l'espace ne permettent pas une aussi bonne compression que celle effectuée selon l'un des trois axes de l'espace. Cela s'explique par le fait même que la décomposition proposée est une combinaison de décompositions faites successivement selon les trois axes de l'espace. C'est elle qui permet de concentrer les données pertinentes en un nombre réduit de sous volumes. La projection la plus critique est celle effectuée selon l'axe le plus dévié d'un des axes de l'espace, c.à.d. celle dont l'axe est à 45 degrés de chacun des trois axes de l'espace. Avec, 25 % des données, l'erreur sur le nombre de pixels justes est de 4,5 %, mais la qualité de l'image de projection reste visuellement très satisfaisante (voir image en annexe 4).

### **6.4.3 Autres résultats**

De nouvelles expériences ont été réalisées pour appuyer les conclusions exposées précédemment.

#### **6.4.3.1 Cinq décompositions**

Étant donné qu'il est difficile de se procurer des données volumiques composées de plus de 112 images de coupes. Nous avons fait du zero padding dans l'image volumique « head » de façon à avoir 128 images de coupes. Ainsi, il est possible de décomposer les données en cinq niveaux. 17 % des données du volume original sont nécessaires pour obtenir 98 % du résultat final de la projection pour le cas des sélections faites dans les trois directions de l'espace. Les images des différentes étapes de la projection sont disponibles à l'annexe 5.

#### **6.4.3.2 Autre image volumique**

Les mêmes expériences faites avec l'image volumique « head » ont été réalisées avec l'image volumique « Torax » [46]. Les résultats ainsi obtenus coïncident avec ceux des expériences précédentes. De même avec 25 % des données du volume original, il est

possible d'obtenir 98 % du résultat final de la projection pour le cas des sélections faites dans les trois directions de l'espace lorsque quatre niveaux de décomposition sont effectués. Seulement, l'erreur est plus visible avec ces images. En effet, certains voxels de hautes intensités ont été écartés dans des zones où la valeur des voxels est très homogène. Les images sont disponibles à l'annexe 6.

### **6.5 Avantages de la méthode**

Le grand avantage de cette méthode est qu'elle permet de faire une sélection des données pertinentes selon la transformation voulue (ici le MIP). Grâce à cela, il est possible d'éliminer un grand nombre de données dans l'application. Ceci permet d'une part d'économiser de l'espace mémoire (83 % dans notre cas), mais aussi de gagner en temps de calcul. Ici, 83 % de données en moins sont à traiter, pour obtenir une image visiblement parfaite.

Cette méthode offre l'avantage des méthodes à approche multi résolution. En effet, il est possible d'obtenir très rapidement une approximation du résultat, que l'on affine progressivement. En effet 50 % des pixels de l'image sont obtenues en moins de 5 % de temps de calcul total dans notre exemple.

Cet algorithme garde l'avantage de l'algorithme de Mroz. Les voxels les plus intéressants dans le cas du MIP, ceux dont l'intensité est la plus élevée, peuvent être traités prioritairement. Il garde l'inconvénient d'une moins bonne qualité de projection. En effet, les méthodes de projection des coordonnées sont beaucoup plus sensibles à l'aliassage. Elles donnent de moins beaux résultats que les méthodes utilisant le parcours de rayons, où il est possible d'effectuer facilement des calculs d'interpolation. Cependant, il est toujours possible d'améliorer la qualité de rendu par sur échantillonnage.



L'algorithme est intéressant si l'on peut tolérer une erreur sur l'image de projection finale. En effet l'algorithme évolue très lentement à partir d'un pourcentage de reconstruction avancé. Il serait intéressant de définir un critère d'arrêt de l'algorithme en fonction d'un taux d'erreur acceptable. Il est possible de définir ce taux par le calcul d'erreur le mieux adapter en fonction des besoins de visualisation. Étant donné que la décomposition utilisée conserve les caractéristiques spatiales, il est possible de définir des critères d'erreur distincts pour les différentes zones d'intérêt du volume. Aussi, ce critère d'erreur peut varier selon les valeurs d'intensité. Les structures de hautes intensités sont reconstruites parfaitement alors que l'on peut tolérer une erreur plus importante dans les zones où les valeurs d'intensité sont moins élevées.

La vitesse de l'algorithme est principalement due au prétraitement efficace qui sélectionne les données les plus importantes. Il pourrait être utilisé en combinaison avec une carte graphique de façon intéressante. Seul un nombre réduit de données peut être envoyé à la carte graphique qui se charge des calculs de projection.

## **6.6 Améliorations et perspectives**

Bien que l'algorithme proposé soit efficace, il est possible d'y apporter des améliorations.

### **6.6.1 Décomposition non directionnelle**

L'aspect directionnel de la décomposition perturbe la qualité de la compression. En effet, lors d'une décomposition, le premier sous volume est composé de l'ensemble des valeurs maximales localement dans un cube de huit voxels. Ce sous volume a un gros pouvoir de compression comparé aux autres.

Les voxels de deuxième importance de l'analyse locale se trouvent classés dans l'un des trois sous volumes, juxtaposant le premier sous volume, selon leurs caractéristiques directionnelles (paragraphe 4.2.2). Ceci a pour conséquence, une décroissance très

rapide de la contribution dans le classement des sous volumes. Plus on avance dans le classement des sous volumes, plus nombreux sont les sous volumes à traiter pour diminuer l'erreur de 1 %.

Il serait intéressant de pouvoir proposer une décomposition qui concentre les voxels de deuxième importance de l'analyse locale dans un seul et unique sous volume. Et ainsi pouvoir concentrer aussi les autres voxels de l'analyse locale dans un même sous volume selon leur importance.

Cela peut se faire de deux façons. La première consisterait à utiliser la même décomposition, mais en l'appliquant plusieurs fois pour le même niveau de décomposition. À chaque étape, les voxels sélectionnés dans le premier sous volume dans l'étape précédente sont remplacés par la valeur nulle dans le volume initial. Ainsi, à l'étape suivante les voxels de deuxième importance sont concentré en un seul sous volume.

La deuxième méthode consisterait à redéfinir une décomposition qui reviendrait à effectuer le processus de la première méthode. Ce serait un type de décomposition basée sur des ondelettes morphologiques non séparables. Pour chaque cube unité de 8 voxels du volume initial, chaque voxel va être attribué à un sous volume selon l'importance de sa valeur dans le cube unité. Les voxels vont être « marqués » selon leur déplacement.

### **6.6.2 Utilisation d'algorithmes de codage performants**

L'algorithme est intéressant si l'on peut tolérer une erreur sur l'image de projection finale. Il serait intéressant aussi de pouvoir adapter les méthodes de codage comme EZW, ou SPITH avec la décomposition proposée. En effet, le principe de ces méthodes exploite le fait qu'une zone de haute intensité trouvée à un bas niveau de résolution, se retrouve aussi aux niveaux supérieurs. Ces méthodes permettent de stocker les données

par ordre d'importance de leur contribution de manière optimum. Cela permet d'effectuer des compressions avec perte efficacement.

### **6.6.3      Extension à d'autres types de rendu**

L'efficacité de la méthode repose sur le fait que l'on décompose le volume en différents sous volumes selon la probabilité de contribution des voxels dans la transformation considérée. Ainsi, les voxels les plus importants pour le type de transformation à effectuer sont sélectionnés tout en gardant leurs caractéristiques spatiales. Ce mode de sélection, ou filtrage, pourrait être appliqué à d'autres problèmes.

D'autres techniques de rendu pourraient utiliser ce mode de sélection. Le MIP avec composante de profondeur pourrait utiliser la même décomposition que celle proposée. La méthode de rendu classique d'un volume semi-transparent pourrait utiliser une décomposition en ondelette qui sélectionne les voxels selon leur opacité.

## CONCLUSION

Nous avons proposé une nouvelle représentation de données se basant sur les ondelettes morphologiques dans le but d'améliorer l'algorithme MIP. Elle consiste à séparer les minimums locaux des maximums locaux en différents sous-blocs. Des « marques » doivent être attribuées aux coefficients issus de la décomposition pour assurer la réversibilité de la transformation. Cette représentation garde la propriété d'orthogonalité (non redondance des coefficients) mais nécessite plus d'espace mémoire que la représentation initiale (stockage des « marques »). L'espace réservé aux « marques » en nombre de bits est de trois demis le nombre de données pour chaque décomposition. Ceci peut être considéré comme négligeable si l'on considère le fait que les données sont codées sur minimum 8 bits. Cette nouvelle représentation a l'avantage de regrouper les données qui sont nécessaires à la projection MIP en un volume réduit de coefficients. Ainsi, les données inutiles peuvent être éliminées facilement pour libérer de l'espace mémoire. Ceci permet d'obtenir une compression efficace du volume initial.

Ainsi, nous avons développés deux approches dans le but de proposer un algorithme progressif du MIP. La première reprend directement le schéma de reconstruction progressif par ondelettes. Elle consiste à projeter indépendamment les blocs issus de la décomposition proposée. Puis l'image finale est obtenue en appliquant des opérateurs de reconstruction aux projections de chaque bloc. Cette approche ne permet pas d'obtenir une reconstruction parfaite du résultat attendu. Plus le nombre de décompositions augmente, plus l'image finale se dégrade. Cependant elle permet d'obtenir une première approximation du résultat, assez bonne, avec un petit nombre de calculs et de données.

La deuxième approche consiste à séparer le processus de reconstruction. Des opérateurs de synthèse sont appliqués indépendamment sur chaque bloc avant d'être projeté. La reconstruction progressive se fait en appliquant l'opérateur d'addition successivement avec les projections des blocs. Une structure de données différente est nécessaire pour

minimiser le stockage en mémoire et les temps de calculs. Cette deuxième approche est intéressante car elle permet la reconstruction parfaite. De plus, elle tire avantage de la décomposition proposée qui sélectionne les données pertinentes pour un rendu MIP. Avec moins de 30 % des données initiales, il est possible d'obtenir 98 % du résultat attendu en termes de coefficients exacts. 98 % est un taux acceptable pour obtenir une image visuellement parfaite. Les 2 % d'erreur se situent dans des zones où l'intensité est minimale. Ceci ne perturbe donc pas la qualité de visualisation des structures de hautes intensités qui représentent l'objet d'intérêt dans le contexte d'un rendu MIP. Autre avantage, il est possible d'avoir très rapidement une approximation du résultat que l'on affine progressivement. Avec seulement 2 % des données initiales, 50 % des coefficients exacts peuvent être obtenus.

Ceci permet de concurrencer les meilleurs algorithmes de rendu MIP, vus jusqu'à ce jour dans la littérature. En effet, notre algorithme offre plus de possibilités que celui développé par Lukas Mroz, un des plus performants à ce jour. Nous utilisons la technique de projection efficace qu'a développée ce dernier et qui consiste à projeter les voxels de valeur maximum en premier. Mais en plus, la décomposition que nous proposons permet d'éliminer une grande partie de voxels non contribuant dans la projection MIP de manière beaucoup plus efficace que le prétraitement proposé par Lukas Mroz. En effet, notre décomposition est basée sur un modèle solide inspiré de la théorie des ondelettes. Elle permet de compresser très efficacement de gros volumes de données. Plus le volume est gros, plus le nombre de décompositions possibles est élevé, et meilleure est la compression. La qualité de compression est indépendante de la forme des valeurs du volume initial. Cet avantage permet d'améliorer efficacement les temps de calcul. Ainsi, les voxels sont traités prioritairement en fonction de leur valeur d'intensité mais aussi en fonction de leur disposition dans l'espace. Cela permet d'obtenir une image plus représentative de l'image en un temps très court.

Les résultats obtenus par le schéma de décomposition proposé, et l'algorithme progressif MIP associé, sont donc fort satisfaisants et prometteurs. C'est pourquoi nous pensons que les recommandations suivantes pourraient être intéressantes à développer :

- a. Utiliser une décomposition tridimensionnelle non séparable à la place d'une décomposition unidimensionnelle répétée dans les trois axes de l'espace, afin d'obtenir une compression plus efficace.
- b. Adapter les algorithmes efficaces de codage comme le EZW, ou le SPITH avec la décomposition proposée. Ces méthodes permettent de stockées efficacement les données par ordre d'importance de leur contribution.
- c. Utiliser des schémas similaires de décomposition pour d'autres types de rendu ou d'autres types d'algorithmes coûteux, avec des critères de sélection adaptés (au lieu de la sélection du maximum local d'intensité).

**ANNEXE 1**  
**Exemples de rendu volumique**

## 2.2 La technique de visualisation par surface ou Marching Cube

Référence : <http://www.imm.dtu.dk/~jab/gallery/texvolvis.html>



Figure 28 Visualisation d'une tête avec la technique de visualisation par surface



### 2.3 Lancer de rayons pour rendu volumique semi-transparent

Référence : <http://www.caip.rutgers.edu/~haray/race.html>



Figure 29 Rendu volumique semi-transparent d'une tête

### 2.4 Lancer de rayons pour rendu volumique avec effet d'opacité

Référence : <http://www.caip.rutgers.edu/~haray/race.html>



Figure 30 Visualisation d'une tête avec la technique de lancer de rayon avec effet d'opacité

## 2.5 Splatting

Référence: <http://www.cs.rug.nl/~michel/waveletsplatting/wavelets.html>



Figure 31 Visualisation d'une tête avec la technique de splatting

## 2.6 Maximum Intensity Projection (MIP)

Référence: <http://www.mevisys.com/html/3d/overview.html>



Figure 32 Visualisation d'un crâne avec la technique de MIP

## **ANNEXE 2**

### **Démonstrations et encadrement de l'erreur**

## 2.1 Cas où $P_z(x_{j+1}(n))$ et $P_z(y_{j+1}(n))$ ont des marques identiques

La première alternative correspond à celle où le coefficient projeté de l'espace du signal  $V_{j,x}$  et le coefficient projeté de l'espace des détails  $W_{j,x}$  sont « marqués », c.a.d.  $P_z(x_{j+1}(n)).m = 1$  et  $P_z(y_{j+1}(n)).m = 1$ . On a alors :

$$P_z(x_{j+1}(n)) = P_z(x_{j+1}(n)) \text{ tel que } x_{j+1}(n).m = 1 \quad (\text{A5-1})$$

$$P_z(y_{j+1}(n)) = P_z(y_{j+1}(n)) \text{ tel que } y_{j+1}(n).m = 1 \quad (\text{A5-2})$$

L'égalité des expressions entre les deux membres de l'inégalité ( 5-12 ) est vérifiée si est seulement si :

$$P_z(y_{j+1}(n)) \text{ tel que } y_{j+1}(n).m = 1 \geq P_z(x_{j+1}(n)) \text{ tel que } x_{j+1}(n).m = 0 \quad (\text{A5-3})$$

alors  $c_{j1}(2n+1) = c_{j2}(2n+1)$  et

$$P_z(x_{j+1}(n)) \text{ tel que } x_{j+1}(n).m = 1 \geq P_z(y_{j+1}(n)) \text{ tel que } y_{j+1}(n).m = 0 \quad (\text{A5-4})$$

alors  $c_{j1}(2n) = c_{j2}(2n)$ .

Les équations ( 5-9 ), (A5-1 ) et (A5-2 ) permettent d'écrire :

$$P_z(x_{j+1}^z(n)) \text{ tel que } x_{j+1}^z(n).m = 1 \geq P_z(x_{j+1}^z(n)) \text{ tel que } x_{j+1}^z(n).m = 0 \quad (\text{A5-5})$$

$$P_z(y_{j+1}(n)) \text{ tel que } y_{j+1}(n).m = 1 \geq P_z(y_{j+1}(n)) \text{ tel que } y_{j+1}(n).m = 0 \quad (\text{A5-6})$$

Étant donné que la décomposition décrite au paragraphe 4.1. sépare les maximums locaux des minimums locaux. Il est possible d'écrire :

$$P_z(x_{j+1}(n)) \text{ tel que } x_{j+1}(n).m = 0 \geq P_z(y_{j+1}(n)) \text{ tel que } y_{j+1}(n).m = 0 \quad (\text{A5-7})$$

$$P_z(x_{j+1}(n)) \text{ tel que } x_{j+1}(n).m = 1 \geq P_z(y_{j+1}(n)) \text{ tel que } y_{j+1}(n).m = 1 \quad (\text{A5-8})$$

Les expressions (A5-5) et (A5-7) permettent de déduire l'expression (A5-4); donc la valeur de  $c_{ji}(2n+1)$  est toujours vraie pour cette alternative. Mais, les expressions (A5-6) et (A5-8) ne nous permettent pas de déduire l'expression (A5-3) en effet, rien n'indique que :

$$P_z(y_{j+1}(n)) \text{ tel que } y_{j+1}(n).m = 1 \geq P_z(x_{j+1}(n)) \text{ tel que } x_{j+1}(n).m = 0$$

Il y a donc une erreur sur  $c_{ji}(2n)$ . Cependant les expressions (A5-5), (A5-6) et (A5-8) permettent d'approximer la valeur de cette composante dans un intervalle en effet :

$$P_z(y_{j+1}(n)) \text{ tel que } y_{j+1}(n).m = 1 \leq c_{j2}(2n) \leq P_z(x_{j+1}(n)) \text{ tel que } x_{j+1}(n).m = 1$$

Les marques  $P_z(y_{j+1}(n)).m$  sont associées à la valeur approximée de la composante  $c_{ji}(2n)$ .

La deuxième alternative correspond à celle où le coefficient projeté de l'espace du signal  $V_{j,x}$  et le coefficient projeté de l'espace des détails  $W_{j,x}$  sont « non marqués », c.a.d.

$$P_z(x_{j+1}(n)).m = 0 \text{ et } P_z(y_{j+1}(n)).m = 0$$

On a alors :

$$P_z(y_{j+1}(n)) = P_z(y_{j+1}(n)) \text{ tel que } y_{j+1}(n).m = 0$$

$$P_z(x_{j+1}(n)) = P_z(x_{j+1}(n)) \text{ tel que } x_{j+1}(n).m = 0$$

Un raisonnement similaire à celui donné pour le cas 1 permet de montrer que les éléments  $c_{j1}(2n)$  sont toujours justes pour cette alternative. Mais, il y a une erreur sur la valeur  $c_{j1}(2n+1)$ . Cependant, il est possible d'approximer cette valeur dans un intervalle en effet :

$$P_z(y_{j+1}(n)) \text{ tel que } y_{j+1}(n).m = 0 \leq c_{j2}(2n+1) \leq P_z(x_{j+1}(n)) \text{ tel que } x_{j+1}(n).m = 0$$

Les marques  $P_z(y_{j+1}(n)).m$  sont associées à la valeur approximée de la composante  $c_{j1}(2n+1)$ .

## 2.2 Cas où $P_z(x_{j+1}(n))$ et $P_z(y_{j+1}(n))$ ont des marques différentes

La première alternative correspond à celle où le coefficient projeté de l'espace du signal  $V_{j,x}$  est « marqué », et où le coefficient projeté de l'espace des détails  $W_{j,x}$  est « non marqué », c.a.d.  $P_z(x_{j+1}(n)).m = 1$  et  $P_z(y_{j+1}(n)).m = 0$ . On a alors :

$$P_z(x_{j+1}(n)) = P_z(x_{j+1}(n)) \text{ tel que } x_{j+1}(n).m = 1 \quad (\text{A5-9})$$

$$P_z(y_{j+1}(n)) = P_z(y_{j+1}(n)) \text{ tel que } y_{j+1}(n).m = 0 \quad (\text{A5-10})$$

Pour cette alternative, on a directement  $c_{j1}(2n+1) = c_{j2}(2n+1)$ . Les expressions (A5-9), (A5-10) et (A5-9) permettent d'écrire :

$$P_z(x_{j+1}(n)) \text{ tel que } x_{j+1}(n).m = 1 \geq P_z(x_{j+1}(n)) \text{ tel que } x_{j+1}(n).m = 0 \quad (\text{A5-11})$$

$$P_z(y_{j+1}(n)) \text{ tel que } y_{j+1}(n).m = 0 \geq P_z(y_{j+1}(n)) \text{ tel que } y_{j+1}(n).m = 1 \quad (\text{A5-12})$$

Ainsi les expressions (A5-11), (A5-12) et ( A5-7 ) permettent d'en conclure les expressions suivantes:

$$P_z(x_{j+1}(n)) \text{ tel que } x_{j+1}(n).m = 1 \geq P_z(y_{j+1}(n)) \text{ tel que } y_{j+1}(n).m = 0 \quad (\text{A5-13})$$

$$P_z(x_{j+1}(n)) \text{ tel que } x_{j+1}(n).m = 0 \geq P_z(y_{j+1}(n)) \text{ tel que } y_{j+1}(n).m = 1 \quad (\text{A5-14})$$

Il est donc possible de déduire avec l'expression ( A5-14 ),  $c_{j2}(2n) = P_z(x_{j+1}(n))$  tel que  $x_{j+1}(n).m = 0$  car  $c_{j2}(2n) = \max(P_z(x_{j+1}(n)), P_z(y_{j+1}(n)))$  avec  $x_{j+1}(n).m = 0$ , et  $y_{j+1}(n).m = 1$

Mais  $P_z(x_{j+1}(n))$  tel que  $x_{j+1}(n).m = 0$  n'est pas connu. Cependant, les expressions ( A5-11 ) et ( A5-7 ) permettent de situer sa valeur dans l'intervalle, en effet :

$$P_z(y_{j+1}(n)) \text{ tel que } y_{j+1}(n).m = 0 \leq c_{j2}(2n) \leq P_z(x_{j+1}(n)) \text{ tel que } x_{j+1}(n).m = 1$$

Aucune marque ne peut être associée à l'approximation de  $c_{j1}(2n+1)$ .

La deuxième alternative correspond à celle où le coefficient projeté de l'espace du signal  $V_{j,x}$  est « non marqué », et où le coefficient projeté de l'espace des détails  $W_{j,x}$  est « marqué », c.a.d.  $P_z(x_{j+1}(n)).m = 0$  et  $P_z(y_{j+1}(n)).m = 1$ .

On a alors :

$$P_z(x_{j+1}(n)) = P_z(x_{j+1}(n)) \text{ tel que } x_{j+1}(n).m = 0$$

$$P_z(y_{j+1}(n)) = P_z(y_{j+1}(n)) \text{ tel que } y_{j+1}(n).m = 1$$

Un raisonnement similaire à celui donné pour la première alternative permet de montrer que les éléments  $c_{j1}(2n+1)$  sont toujours justes pour cette alternative. Mais, il y a une



erreur sur la valeur  $c_{j1}(2n)$ . Cependant, il est possible de donner un intervalle pour cette valeur, en effet :

$$P_z(y_{j+1}(n)) \text{ tel que } y_{j+1}(n).m = 1 \leq c_{j2}(2n) \leq P_z(x_{j+1}(n)) \text{ tel que } x_{j+1}(n).m = 0$$

Aucune marque ne peut être associée à l'approximation de  $c_{j1}(2n)$ .

L'approximation faite pour les cas où  $P_z(x_{j+1}(n))$  et  $P_z(y_{j+1}(n))$  ont des marques identiques est plus précise que celle faite pour les cas où  $P_z(x_{j+1}(n))$  et  $P_z(y_{j+1}(n))$  ont des marques différentes. En effet, aucune marque nécessaire à la reconstruction au niveau supérieur ne peut être associée aux valeurs incertaines des cas où  $P_z(x_{j+1}(n))$  et  $P_z(y_{j+1}(n))$  ont des marques différentes.

### **ANNEXE 3**

#### **Première approche : expérience 1**

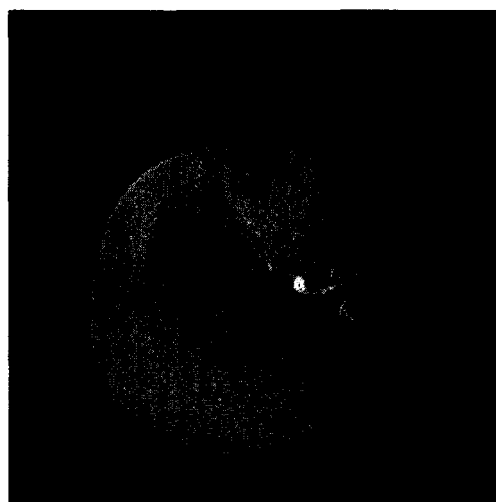
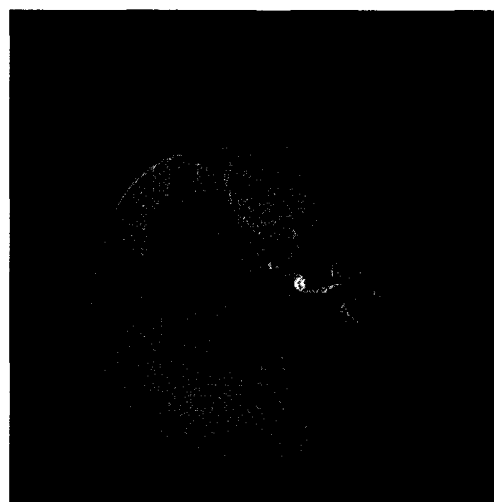


Image MIP du volume original



MIP progressif après une  
décomposition

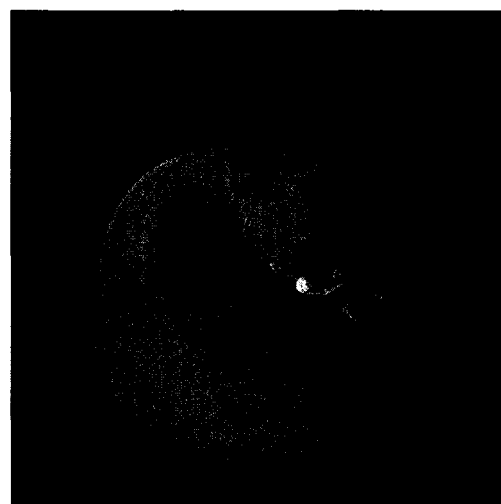
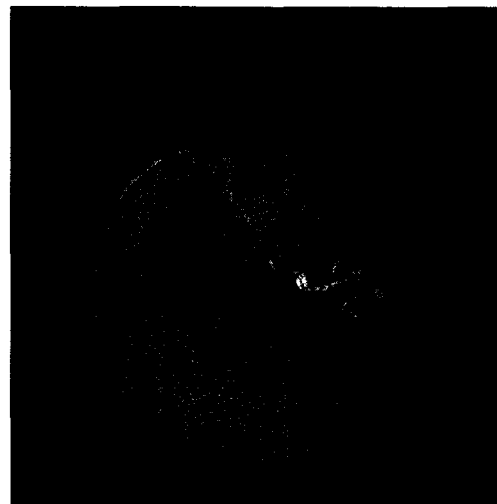


Image MIP du volume original



MIP progressif après deux décompositions

Figure 33 Comparaison des résultats obtenus avec le MIP progressif après une puis deux décompositions

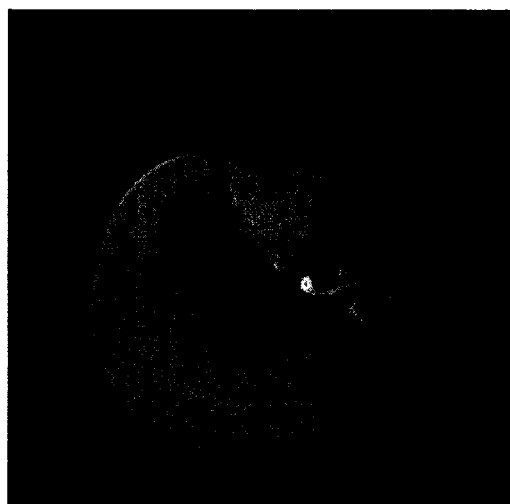
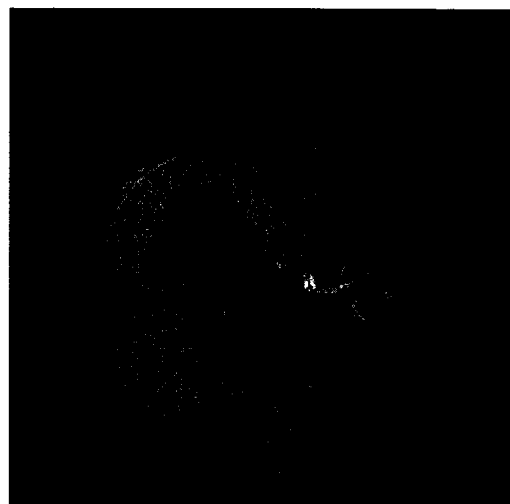


Image MIP du volume original



MIP progressif après trois décompositions



Image MIP du volume original



MIP progressif après quatre décompositions

Figure 34 Comparaison des résultats obtenus avec le MIP progressif après trois puis quatre décompositions

## **ANNEXE 4**

### **Première approche : expérience 2**



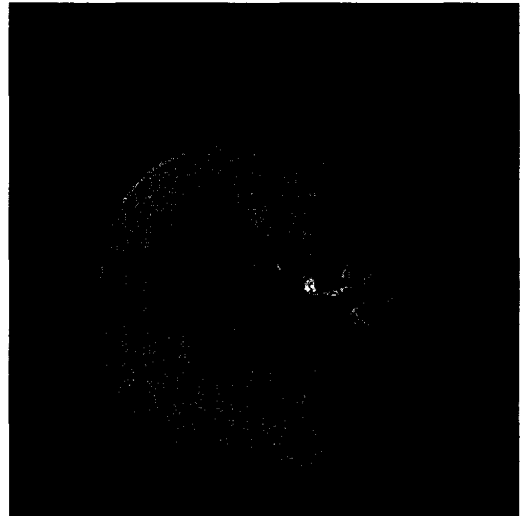
Image MIP du volume original



MIP progressif après une décomposition



Image MIP du volume original



MIP progressif après deux décompositions

Figure 35 Comparaison des résultats obtenus avec le MIP progressif et approximation partielle après une puis deux décompositions



Image MIP du volume original



MIP progressif après trois décompositions



Image MIP du volume original



MIP progressif après quatre décompositions

Figure 36 Comparaison des résultats obtenus avec le MIP progressif et approximation partielle après deux puis trois décompositions

## **ANNEXE 5**

### **Première approche : expérience 3**



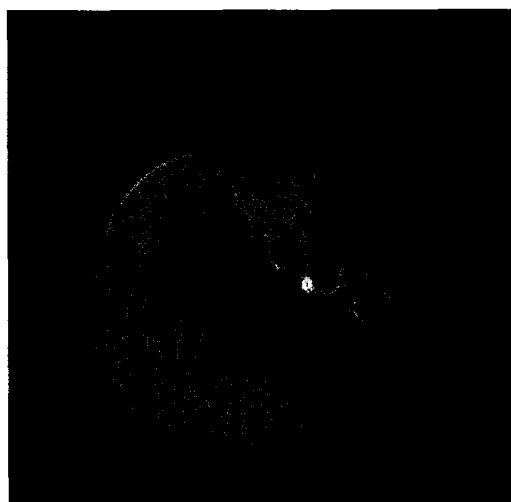
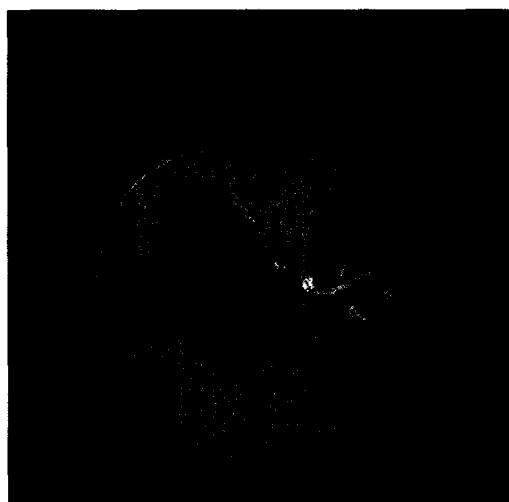


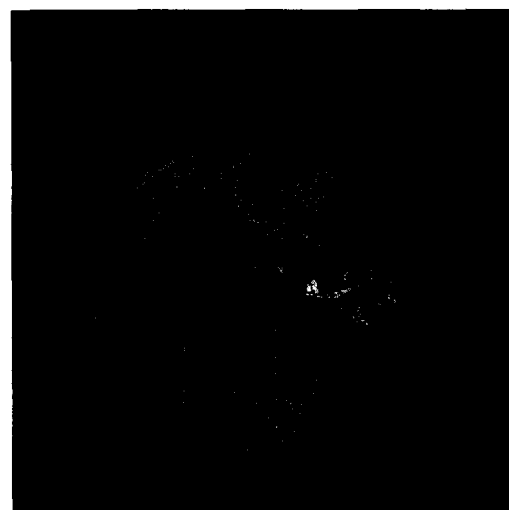
Image MIP du volume original



MIP progressif après deux décompositions  
avec 58 % des coefficients



Image MIP du volume original



MIP progressif après trois décompositions  
avec 33 % des coefficients

Figure 37 Comparaison des résultats obtenus avec le MIP progressif et approximation contrôlée après deux puis trois décompositions

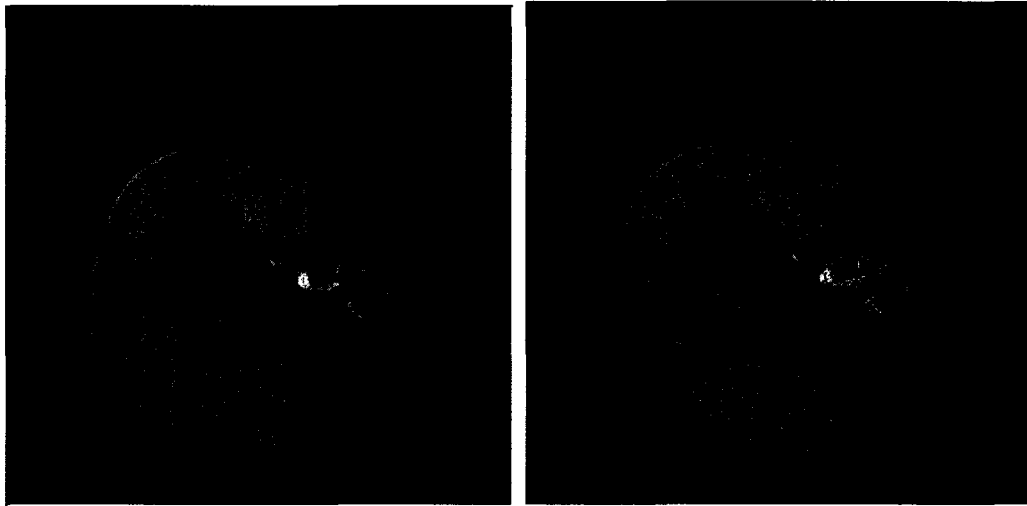


Image MIP du volume original

MIP progressif après quatre  
décompositions avec 17 % des coefficients

Figure 38 Comparaison des résultats obtenus avec le MIP progressif et approximation contrôlée après quatre décompositions

## **ANNEXE 6**

### **Deuxième approche**

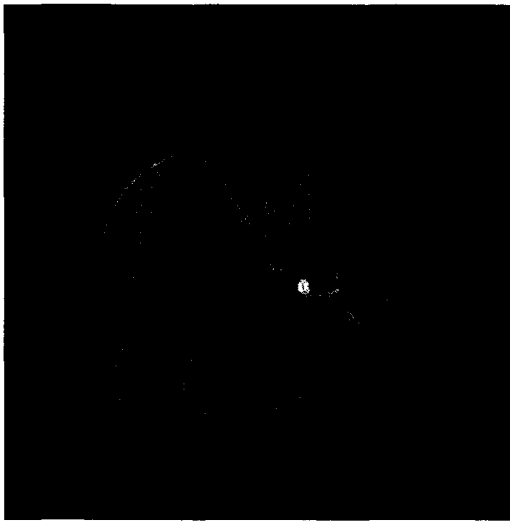


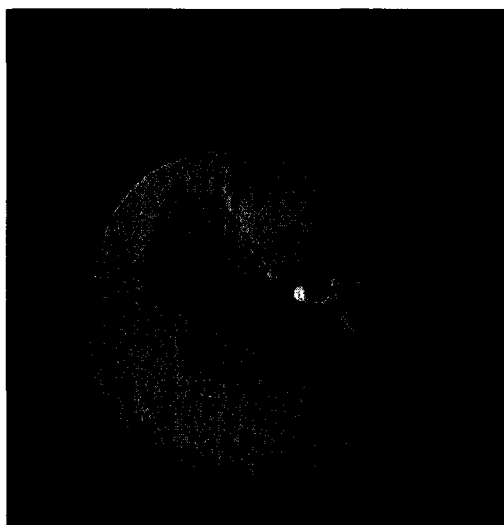
Figure 39 Image de la projection MIP sur le volume initiale



2 % de coefficients inexacts avec  
20 % des données initiales



10 % de coefficients inexacts avec  
10 % des données initiales

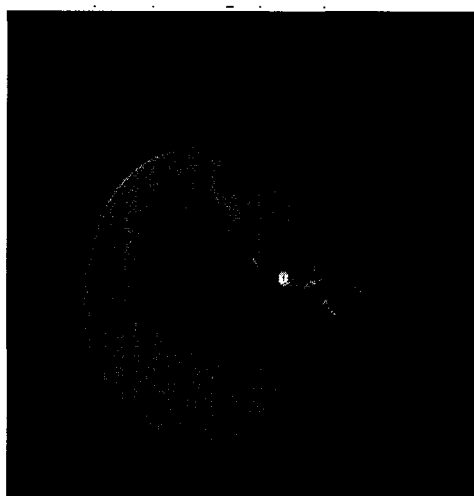


25 % de coefficients inexacts avec  
5 % des données initiales

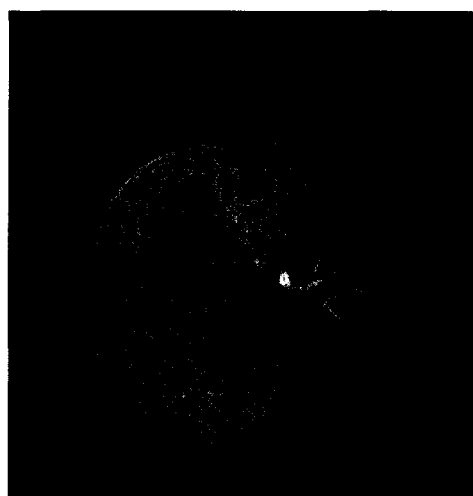


50 % de coefficients inexacts avec 2 %  
des données initiales

Figure 40 Reconstruction progressive après 4 décompositions



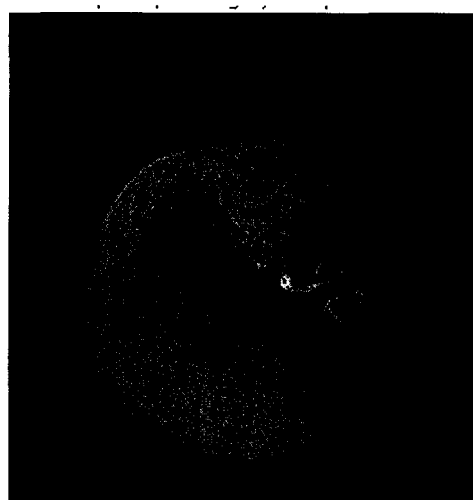
2 % de coefficients inexacts avec  
28 % des données initiales



10 % de coefficients inexacts avec  
15 % des données initiales

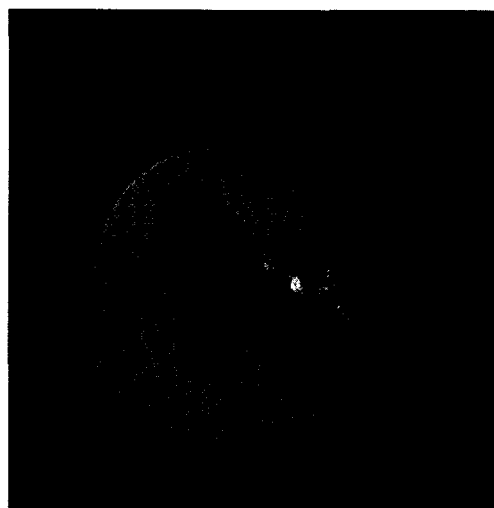


25 % de coefficients inexacts avec  
8 % des données initiales

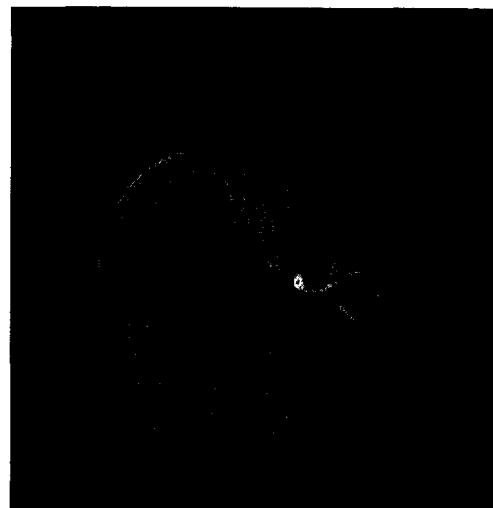


50 % de coefficients inexacts avec  
3 % des données initiales

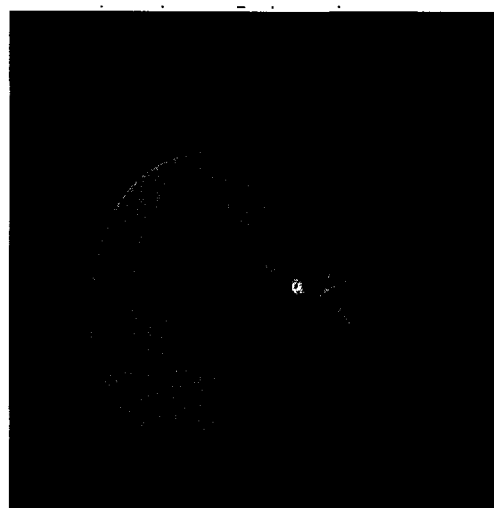
Figure 41 Reconstruction progressive après 3 décompositions



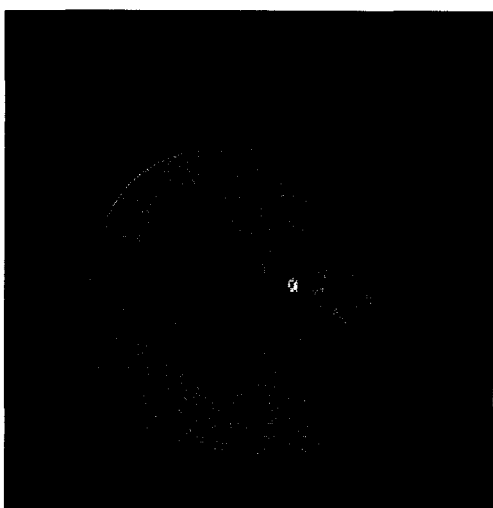
2 % de coefficients inexacts avec  
41 % des données initiales



10 % de coefficients inexacts avec  
25 % des données initiales



25 % de coefficients inexacts avec  
14 % des données initiales

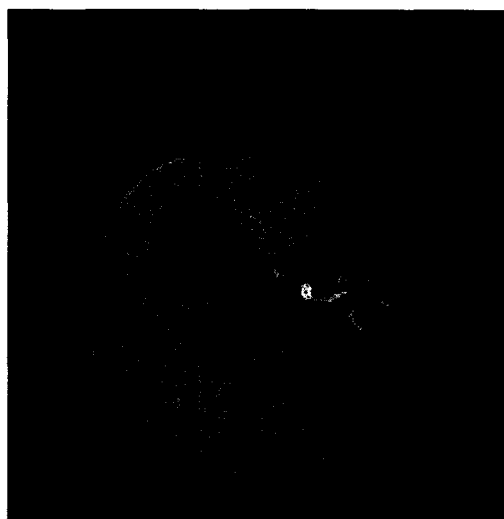


50 % de coefficients inexacts avec 6  
% des données initiales

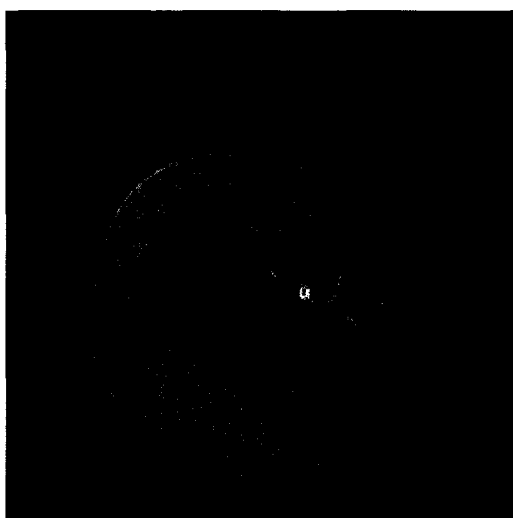
Figure 42 Reconstruction progressive après 2 décompositions



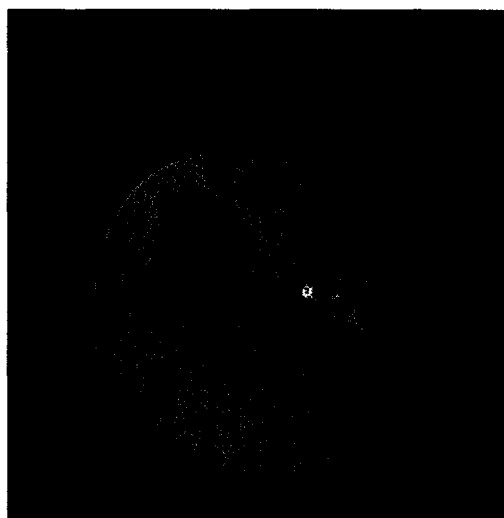
1 % de coefficients inexacts avec  
62,5 % des données initiales



12 % de coefficients inexacts avec  
50 % des données initiales



27 % de coefficients inexacts avec  
25 % des données initiales



44 % de coefficients inexacts avec  
12,5 % des données initiales

Figure 43 Reconstruction progressive après 1 décomposition





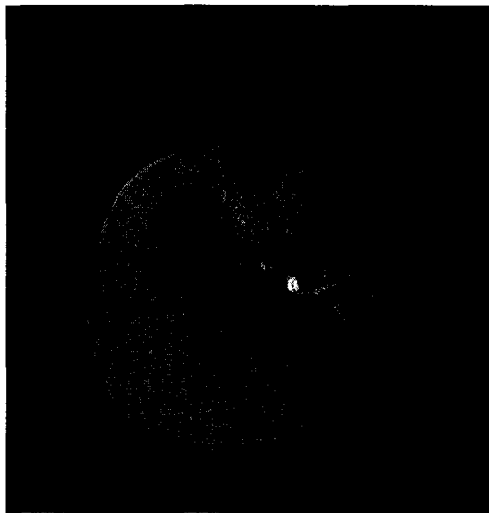
Figure 44 Image de la projection MIP sur le volume initial dans la direction la plus éloignée des 3 axes de l'espace



Figure 45 Image de la projection MIP avec 27 % des données initiales dans la direction la plus éloignée des 3 axes de l'espaces. 4,4 % des coefficients sont inexacts

## **ANNEXE 7**

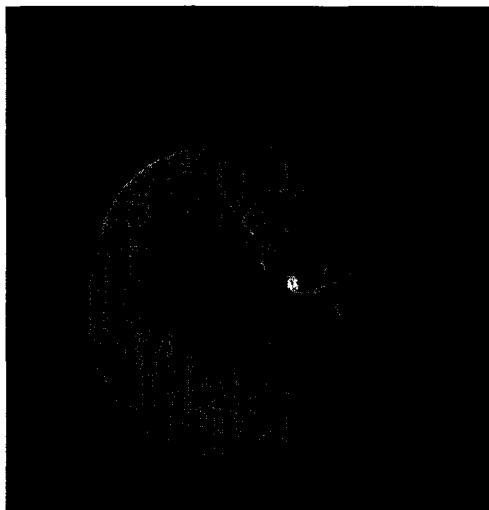
### **Deuxième approche : cinq décompositions**



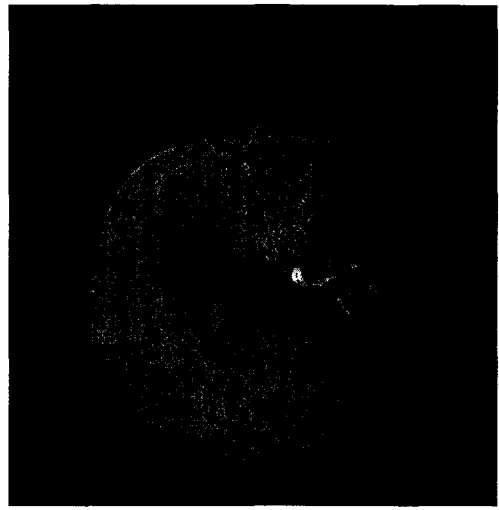
98 % des coefficients avec 17 %  
des données initiales



90 % des coefficients avec 9 % des  
données initiales



75 % des coefficients avec 4 % des  
données initiales



50 % des coefficients avec  
1,5 % des données initiales

Figure 46 Reconstruction progressive après 5 décompositions

## **ANNEXE 8**

### **Deuxième approche : image “torax”**



Figure 47 MIP sur le volume « Thorax » original



Figure 48 MIP axiale du volume «Thorax » obtenue à 98 % des coefficients exacts avec 25 % des données initiales



Figure 49 MIP obtenue à 95 % des coefficients exacts avec 27 % des données initiales, projection à 45 degrés des axes de l'espace

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Mallat (1998). *A Wavelet Tour of Signal Processing*. San Diego, CA: Academic.
- [2] S.Mallat (1989). A theory for multiresolution signal decomposition : The wavelet representation. *IEEE Trans.Pattern analysis and machine Intelligence*. 11, 674-693.
- [3] Roberto Grosso, Thomas Ertl, Aschoff. Joachim (1996). Efficient data structures for volume rendering of wavelet-compressed data. *Fourth international Conference in Central Europe on Computer Graphics and Visualization'96*. University of West Bohemia in Plzen.
- [4] M. A. Westenberg, J. B. T. M. Roerdink (2000). X-ray volume rendering by hierarchical wavelet splatting. *15<sup>th</sup> International Conference on Pattern Recognition. Proceedings*. 163-166, Barcelona, Spain.
- [5] M.H. Gross, L. Lippert, R. Dittrich, S.Häring (1995). Two methods for wavelet-based volume rendering. *Technical report, Ecole polytechnique fédérale de Zurich*.
- [6] M.H. Gross, L. Lippert, A. Dreger, R. Koch (1994). A new method to approximate the volume rendering equation using wavelets and piecewise polynomials. *Technical report, Ecole polytechnique fédérale de Zurich*.
- [7] L. Lippert (1998). Wavelet-based volume rendering. Ph.d. thesis, *Swiss federal institute of technology*.
- [8] L. Lippert, M.H. Gross (1995). Fast wavelet based volume rendering by accumulation of transparent texture map. *Computer Graphics Forum*, 14(3), 431-44.
- [9] S. Holbert, M. Unser, M.Vetterli (1999). Wavelet projections for volume rendering. *Twentieth Annual Conference of European Association for Computer Graphics (EUROGRAPHICS'99)*. Milano, Italy.
- [10] T. Kim, Y. Shin (1999). An efficient wavelet-based compression method for volume rendering. *Seventh Pacific Conference on Computer Graphics and Applications, 1999, Proceedings*. TY – COMF, 147-156.



- [11] F.F. Rolder (1999). Wavelet based 3d compression with fast random access for very large volume data. *Seventh Pacific Conference on Computer Graphics and Applications, 1999, Proceedings*. TY – COMF, 108-117.
- [12] R. Sanchez, M. Carvajal (1998). Wavelet based adaptive interpolation for volume rendering. *IEEE Symposium on Volume Visualization, 1998*, 176 TY-CONF., 127-134.
- [13] J. Gargantini, L.He, Y. Zhou (2000). Comparaison of wavelets for volume rendering. *Ninth International Conference on Geometry and Graphics. Proceedings*. Johannesburg, 68-73.
- [14] J.M. Shapiro (1993). Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 41(12), 3445-3462.
- [15] A. Said, W. A. Pearlman (1996). A new, fast, and efficient image codec based on set partitioning in hierarchical trees. *IEEE Trans. Circuits Syst. Video Technol.* 6, 243-250.
- [16] O. Egger, W.Li (1994). Very low bit rate image coding using morphological operators and adaptative decompositions. *Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing*. Austin, TX, 326-330.
- [17] R. L. Queiroz, D. A. F. Florêncio, R. W. Schafer (1998). Nonexpensive pyramid for image coding using a nonlinear filterbank. *IEEE Trans. Image Processing*, 7, 246-252.
- [18] O.Egger, W.Li, M. Kunt (1995). Hight compression image coding using an adaptative morphological subband decomposition. *Proc.IEEE*. 83, 272-287.
- [19] D. A. F. Florêncio (1996). A new sampling theory and a framework for non-linear filter banks. Ph.D. dissertation, School Elect. Eng., Georgia Inst. Technol., Atlanta,.
- [20] F. J. Hampson, J.-C.Pesquet (1996). A nonlinear subband decomposition with perfect reconstruction. *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing*. Atlanta, GA, 1523-1526.
- [21] H. Cha, L.F. Chaparro (1997). Adaptative morphological representation of signals: Polynomials and wavelet methods. *Multidimen. Syst. Signal. Process.* 8, 249-271.

- [22] R. Claypoole, G. Davis, W. Sweldens, R. Baraniuk (1997). Nonlinear wavelet transforms for image coding. *Proc. 31<sup>st</sup> Asilomar conf. Signals systems, Computers.* 1, 662-667.
- [23] R. L. Claypoole, R. G. Baraniuk, R. D. Nowak (1998). Adaptative wavelet transforms via lifting. *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing.* Chicago, IL.
- [24] P. L. Combettes, J. C- Pesquet (1998). Convex multiresolution analysis. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* 20, 1308-1318.
- [25] F. J. Hampson, J. C- Pesquet (1998). M-band nonlinear subband decompositions with perfect reconstruction. *IEEE Trans. Image Processing.* 7, 1547-1560.
- [26] B. Pouye, A. Benazza-Benyahia, I. Pollak, J.-C. Pesquet, H. Krim (1998). Nonlinear frame-like decompositions. *Signal Processing 9 : Theories and Applications*, S. Theodoridis, I. Pitas, A. stouaitis, N. Kaloupsidis, Eds. Rhodes, Greece : EUSIPCO, 1393-1396.
- [27] J. Goutsias, H. J. A. M. Heijmans (1998). An axiomatic approach to multiresolution signal decomposition. *Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing*, Chicago, IL.
- [28] H. J. A. M. Heijmans (2000). Nonlinear Multiresolution Signal Decomposition Schemes-Part II : Morphological Wavelets. *IEEE Transactions on Image Processing.* 9(11).
- [29] L. Morz, A. König, E. Gröller (2000). Maximum intensity projection at warp speed. *Comput. Graph.* 24, 343-352.
- [30] L. Morz, H. Hauser, E. Gröller (2000). Interactive High- Quality Maximum intensity projection. *Eurographics 2000.* 19(3).
- [31] Jos B. T. M. Roerdink (2003). Multiresolution Maximum Intensity Volume Rendering by Morphological Adjonction Pyramids. *IEEE Transaction on Image Processing.* 12(6).
- [32] H. J. A. M. Heijmans (2000). Nonlinear Multiresolution Signal Decomposition Schemes-Part I : Morphological Pyramids. *IEEE Transactions on Image Processing.* 9(11).
- [33] Jos B. T. M. Roerdink (2002). Comparaison of Morphological Pyramids for MIP Volume Rendering. *Eurographics IEEE TCVG Symposium on Visualization.*

- [34] G. Sakas, M.Grimm, and A. Savopoulos (1995). Optimized maximum intensity projection. *Proceedings of 5<sup>th</sup> EUROGRAPHICS Workshop on Rendering Techniques*. 55-63, Dublin, Ireland.
- [35] K. J. Zuiderveld, A. H. J. Koning, M. A. Viergever (1994). Techniques for speeding up high-quality perspective maximum intensity projection. *Pattern Recognit. Lett.* 15, 507-517.
- [36] W. Cai, G. Sakas (1998). Maximum intensity projection using splatting sheared object space. *Comput. Graph. Forum (Proc. Eurographics '98)*. 17, C113-124.
- [37] W. Heidrich, M. McCool, J. Stevens (1995). Interactive maximum projection volume rendering. *Proceding Visualization '95*. 11-18.
- [38] M. Levoy (1990). Efficient ray tracing of volume data. *ACM Trans. Graph.* 9(3), 245-261.
- [39] S. Parker, M. Parker, Y.Livnat, P.P. Sloan, C.Hansen (1999). Interactive Ray Tracing for Volume Visualisation. *IEEE Trans. Vis. Comp. Graph.* 5(3).
- [40] J. T. Oikarién, L.J. Jyrkynen (1998). Maximum Intensity Projection by 3-dimensional seed filling in view lattice. *Comp. Net. ISBN Sys.* 30, 2003-2014.
- [41] K. H. Kim, H.W. Park (2000). A fast progressive method of maximum intensity projection. *Computerized Medical Imaging and Graphics*. 25, 433-441.
- [42] W. Sweldens (1996). The lifting scheme: A New Philosophy in Biorthogonal Wavelet Constructions. *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 3, 186-200.
- [43] W. Sweldens (1995). The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Proc. SPIE Wavelet Application Signal Image Processing III*. A. F. Lain and M. Unser, Eds., 2569, 68-79.
- [44] Ingrid Daubechies, Wim Sweldens (1998). Factoring wavelet transforms into lifting step. *J. Fourier Anal. Appl.*, Vol.4, Nr.3,1998, preprint.
- [45] W. Sweldens (1998). The lifting scheme: A construction of second generation wavelets. *SIAM J. Math. Ana.* 29, 512-546.
- [46] PhysioBank, *Sample of MR Images*, [en ligne].  
<http://www.physionet.org/physiobank/database/images/> (Consulté le 14 décembre 2004).